Vektorok, pályaelemek

1. Alapképletek

Célunk az, hogy kiszámítsuk egy műhold (m) Föld (F) körüli pályájának alakját (fél-nagytengely, excentricitás) kezdeti helyének és sebességének ismeretében. Ehhez az alábbi összefüggésekre lesz szükségünk:

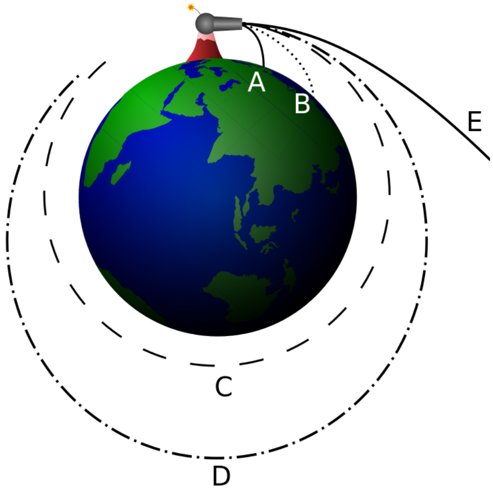
- Energia-integrál: $h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2(m_\mathrm{F}+m_\mathrm{m})}{r}$.
  - A műhold pályája akkor kötött, ha $h < 0$. Intuitíve annál kötöttebb, minél szűkebb pályán mozog, vagyis - mint az levezethető - az energia fordítottan arányos a fél-nagytengellyel: $h = -\frac{k^2(m_\mathrm{F}+m_\mathrm{m})}{2a} \approx -\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{2a}$.
- Impulzus–momentum-integrál: $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.
  - $c = \sqrt{k^2(m_\mathrm{F} + m_\mathrm{m})a(1-e^2)} \approx \sqrt{k^2 m_\mathrm{F} a(1-e^2)}$.
  - $c = rv\sin(\alpha)$, ahol α a hely- és a sebességvektorok által bezárt szög.
  - $c = r^2\dot{\phi}$, ahol ϕ a kúpszeletek "$r = p/\left(1 + e\cos(\phi)\right)$" fokális egyenletében szereplő polárszög (valódi anomália), $\dot{\phi}$ tehát egyszerűen a szögsebesség.
- Laplace-integrál: $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{k^2(m_\mathrm{F}+m_\mathrm{m})}{r}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \times .\mathbf{c}$
  - $\lambda^2 = k^4(m_\mathrm{F} + m_\mathrm{m})^2 + 2hc^2 \approx k^4 m_\mathrm{F}^2 + 2hc^2$.
  - A $\boldsymbol{\lambda}$-val jelölt Laplace-Runge-Lenz vektor egyik fő jellegzetessége, hogy a pálya pericentrumába mutat, a másik pedig, hogy annyiszor "hosszabb", ahányszor nagyobb az excentricitás; konkrétan - mint az szintén levezethető -: $\lambda = k^2(m_\mathrm{F} + m_\mathrm{m})e \approx k^2 m_\mathrm{F} e$.

2. Geometriai szemlélet

Newton híres példája alapján ha egy igen magas, hipotetikus hegy tetejéről horizontálisan kilövünk egy ágyúgolyót, az kis sebesség esetén körülbelül a hegy lábánál ér földet. A sebesség növelésével a becsapódási pont egyre távolabbra kerül, mígnem egy kritikus sebességnél (első kozmikus sebesség) az ágyúgolyó körbeesi a Földet, és körpályán a végtelenségig keringeni fog körülötte. A sebesség növelésével a pálya egyre elnyúltabb ellipszissé válik, egy újabb kritikus értéknél pedig (második kozmikus sebesség) parabola lesz (a műhold elszökik a végtelenbe). Tovább növelve a sebességet az elszökés hiperbola-pályán történik (ld. 1. ábra).

2.1. Cirkularizáció

Cseréljük ki gondolatban a fenti példa ágyúgolyóját egy sztelláris, a Földet pedig egy szupermasszív fekete lyukra. Képzeljük el, hogy a kisebb fekete lyuk erősen elnyúlt pályán kering a nagyobb körül. Valahányszor áthalad a pericentrumon, gravitációs hullámokat bocsát ki, azaz mechanikai energiát veszít. Ez annak felel meg, mintha az ágyúgolyót kisebb sebességgel lőttük volna ki: az újabb körben már nem távolodik el annyira a gravitációs vonzócentrumtól, vagyis kevésbé elnyúlt pályán fog mozogni. A fekete lyukak esetében a folyamat egészen addig folytatódik, míg végül a pálya teljesen kör alakúvá nem gömbölyödik (cirkularizálódik). Excentrikus feketelyuk-ütközéshez tipikusan egy harmadik perturbáló objektum szükséges.



1. ábra. Az első kozmikus sebessénél kisebb értékek esetén az ágyúgolyó a felszínbe csapódik (A és B görbék; valójában kicsi ellipszis-pályán keringenének a Föld körül, de mivel a bolygó nem pontszerű, ezért erre nem képesek). Ha a kezdősebesség pontosan megegyezik az első kozmikussal, körpályát kapunk (C görbe). Efölött a pálya egyre elnyúltabb ellipszis (D görbe), míg a második kozmikus sebesség esetén végtelenbe szökő parabola (E görbe). A második kozmikus sebességet meghaladóan hiperbola-pályákat kapunk (nem szerepel az ábrán). Forrás: Wikipedia

3. Az egységnyi excentricitás

Ismeretes, hogy amennyiben $e = 0$, a pálya kör, ha pedig $0 < e < 1$, akkor ellipszis. A "$h = -k^2 m_\mathrm{F}/2a$" és a "$c = \sqrt{k^2 m_\mathrm{F} a(1-e^2)}$" összefüggések egymásba helyettesítésével megkapjuk, hogy mi történik $e = 1$ esetén:

$$c^2 = k^2 m_\mathrm{F} a(1-e^2),$$

$$c^2 = k^2 m_\mathrm{F} \left(-\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{2h}\right)(1-e^2),$$

$$e^2 - 1 = \frac{2hc^2}{k^4 m_\mathrm{F}^2},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{k^4 m_\mathrm{F}^2}}.$$

Innen látszik, hogy az $e = 1$ eset kétféleképpen állhat elő:

- $h = 0$: ilyenkor a gravitációs "kötési" energiát pont kiegyenlíti a kinetikus energia (második kozmikus sebesség), vagyis a két égitest parabola-pályán távolodik egymástól (a nagytengely végtelen naggyá válik);
- $c = 0$: ilyenkor a "pálya nem görbül", vagyis a mozgás egy egyenes mentén történik (a kistengely nullává válik).

4. Feladatok

4.1.

A Föld felszínétől számítva 1000 km-es magasságban, horizontális irányban 8 km/s-es sebességgel kilövünk egy műholdat. Mekkora lesz pályájának fél-nagytengelye, excentricitása, peri- és apocentruma valamint keringési ideje?
Adatok:

- $m_\mathrm{F} = 5.97 \times 10^{24}$ kg,
- $m_\mathrm{m} \approx 0$,
- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$,
- $R_\mathrm{F} = 6371\ \mathrm{km} = 6.371 \times 10^6\ \mathrm{m}$,
- $H = 1000\ \mathrm{km} = 10^6\ \mathrm{m}$,
- $r = H + R_\mathrm{F} = 7.371 \times 10^6\ \mathrm{m}$,
- $v = 8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 8000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Először meghatározzuk a h fajlagos energiát:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} = \frac{1}{2}\left(8 \times 10^3\right)^2 - 6.67 \times 10^{-11}\frac{5.97 \times 10^{24}}{7.371 \times 10^6} = -2.2 \times 10^7\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}. \tag{1}$$

A negatív előjel természetesen arra utal, hogy a pálya kötött. Az $a \approx -k^2 m_\mathrm{F}/(2h)$ képlet segítségével a fél-nagytengely:

$$a = -6.67 \times 10^{-11}\frac{5.97 \times 10^{24}}{2\left(-2.2 \times 10^7\right)} = 9.05 \times 10^6\ \mathrm{m}. \tag{2}$$

Most a fajlagos impulzus-momentumot számoljuk ki a $c = rv\sin(\alpha)$ segítségével, ahol α a hely- és sebességvektorok által bezárt szög. Esetünkben, mivel horizontális indításról beszélünk, $\alpha = 90°$:

$$c = 7.371 \times 10^6 \cdot 8 \times 10^3 \cdot \sin(90°) = 5.9 \times 10^{10}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}. \tag{3}$$

Az előzőekből a Laplace-vektor nagysága:

$$\lambda \approx \sqrt{k^4 m_\mathrm{F}^2 + 2hc^2} = \sqrt{\left(6.67 \times 10^{-11}\right)^2\left(5.97 \times 10^{24}\right)^2 + 2\left(-2.2 \times 10^7\right)\left(5.9 \times 10^{10}\right)^2} = 7.35 \times 10^{13}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}. \tag{4}$$

Innen az excentricitás:

$$e \approx \frac{\lambda}{k^2 m_\mathrm{F}} = \frac{7.35 \times 10^{13}}{6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24}} = 0.18. \tag{5}$$

A peri- és apocentrum-távolságok:

$$r_\mathrm{p} = a(1-e) = 9.05 \times 10^6(1 - 0.18) = 7.42 \times 10^6\ \mathrm{m}, \tag{6}$$

$$r_\mathrm{a} = a(1+e) = 9.05 \times 10^6(1 + 0.18) = 1.0679 \times 10^7\ \mathrm{m}. \tag{7}$$

Van valami egészen zavarbaejtő a most kapott pericentrum-távolságban. Tekintettel arra, hogy a kezdeti sebesség vektora merőleges volt a helyvektorra, illetve hogy nagysága az első és a második kozmikus

sebesség közé esett, arra számítanánk, hogy a kezdeti távolság (r) megegyezik a preicentrummal (r_p). Az, hogy ez nincs így, a számítás közbeni kerekítéseknek köszönhető.
Kepler 3. törvényéből a fél-nagytengely felhasználásával megkapjuk a keringési időt:

$$T \approx \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{k^2 m_\mathrm{F}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \left(9.05 \times 10^6\right)^3}{6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24}}} = 8572.4 \text{ s} = 2.38 \text{ h}. \tag{8}$$

4.2.

Az elrendezés ugyanaz, mint az előbb, viszont a kezdősebesség legyen most az első kozmikus, vagyis 7350 m/s, iránya pedig zárjon be a helyvektorral $\alpha = 30°$-ot. Számítsuk ki az előbbi feladatban kérdezett mennyiségeket!
Az energia:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} = \frac{1}{2}\left(7.35 \times 10^3\right)^2 - 6.67 \times 10^{-11}\frac{5.97 \times 10^{24}}{7.371 \times 10^6} = -2.7 \times 10^7 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}. \tag{9}$$

Innen a fél-nagytengely:

$$a = -6.67 \times 10^{-11}\frac{5.97 \times 10^{24}}{2\left(-2.7 \times 10^7\right)} = 7.37 \times 10^6 \text{ m}. \tag{10}$$

Az előző feladatban látott értéknél ez kisebb: ez kötöttebb pályát jelent, ami nem meglepő, hiszen kisebb kezdősebességgel lőttük ki a műholdunkat (jobban dominál a gravitációs kötési energia). Ezt az eredményt a bezárt szög még nem befolyásolja.
Az impulzus-momentum:

$$c = rv\sin(\alpha) = 7.371 \times 10^6 \cdot 7.35 \times 10^3 \cdot \sin(30°) = 2.71 \times 10^{10}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}. \tag{11}$$

Ez az érték már jelentősen kisebb annál, mint amit az előbbi feladatban láttunk. Ennek oka, hogy α jóval kisebb $90°$-nál; $\alpha = 0$ esetén, vagyis mikor a sebesség- párhuzamos a helyvektorral (tehát radiális a mozgás), az impulzus-momentum nulla lenne.
Az előbbiek alapján a Laplace-vektor:

$$\lambda \approx \sqrt{k^4 m_\mathrm{F}^2 + 2hc^2} = \sqrt{\left(6.67 \times 10^{-11}\right)^2\left(5.97 \times 10^{24}\right)^2 + 2\left(-2.7 \times 10^7\right)\left(2.71 \times 10^{10}\right)^2} = 3.45 \times 10^{14}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}, \tag{12}$$

az excentriciás pedig

$$e \approx \frac{\lambda}{k^2 m_\mathrm{F}} = \frac{3.45 \times 10^{14}}{6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24}} = 0.87. \tag{13}$$

Ez kifejezetten elnyúlt pályát jelent, vagyis arra számíthatunk, hogy a peri- és apocentrum-távolságok között nagy lesz a különbség:

$$r_\mathrm{p} = a(1-e) = 7.37 \times 10^6(1-0.87) = 9.5 \times 10^5 \text{ m}, \tag{14}$$

$$r_\mathrm{a} = a(1+e) = 7.37 \times 10^6(1+0.87) = 1.378 \times 10^7 \text{ m}. \tag{15}$$

Mivel $r_\mathrm{p} < R_\mathrm{F}$, a műholdunk a Földbe fog csapódni. Csodálkozzunk rá, hogy mindez annak ellenére történik, hogy a körpályának megfelelő első kozmikus sebességgel indítottuk el. Az eltérő viselkedés abból adódik, hogy nem horizontális volt a kezdeti sebességvektor iránya.

4.3.

Legyen egy kisbolygó fél-nagytengelye 3 AU, excentricitása pedig 0.3. Mekkora és milyen irányú lesz a sebességvektora a rádiusz-vektorhoz képest akkor, amikor a Naptól 3 AU távolságra lesz?
Adatok:

- $a = 3 \text{ AU} = 4.5 \times 10^{11}$ m,
- $e = 0.3$,
  - $r_\mathrm{p} = a(1-e) = 3(1-0.3) = 2.1 \text{ AU} = 3.15 \times 10^{11}$ m,
  - $r_\mathrm{a} = a(1+e) = 3(1+0.3) = 3.9 \text{ AU} = 5.85 \times 10^{11}$ m,
- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$,
- $m_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg,
  - $k^2 m_\odot = 1.334 \times 10^{20} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$.

Először kiszámoljuk a pályára jellemző két legfontosabb fizikai mennyiséget, a h energiát illetve a c impulzusmomentumot. A $h = -\frac{k^2 m_\odot}{2a}$ segítségével:

$$h = -\frac{1.334 \times 10^{20}}{2 \cdot 4.5 \times 10^{11}} = -1.48 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}, \tag{16}$$

továbbá a $c = \sqrt{k^2 m_\odot a(1-e^2)}$ felhasználásával

$$c = \sqrt{1.334 \times 10^{20} \cdot 4.5 \times 10^{11}(1-0.3^2)} = 7.39 \times 10^{15} \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}. \tag{17}$$

Átalakítva az energiára vonatkozó összefüggést:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\odot}{r} \rightarrow v = \sqrt{2\left(h + \frac{k^2 m_\odot}{r}\right)}. \tag{18}$$

Behelyettesítve az $r = 3 \text{ AU} = 4.5 \times 10^{11}$ m értéket, megkapjuk a sebességet:

$$v = \sqrt{2\left(-1.48 \times 10^8 + \frac{1.334 \times 10^{20}}{4.5 \times 10^{11}}\right)} = 17230 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{19}$$

Végül a $c = rv\sin(\alpha)$ összefüggésből adódik a szög:

$$\sin(\alpha) = \frac{7.39 \times 10^{15}}{4.5 \times 10^{11} \cdot 1.723 \times 10^4} = 0.95312 \rightarrow \alpha = 72.39°.$$

4.4.

Számoljuk ki a Merkúr perihéliumbeli szögsebességét!
Adatok:

- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$,

- $m_{\mathrm{N}} = 2 \times 10^{30}$ kg,
- $m_{\mathrm{N}} \gg m_{\mathrm{M}} \approx 0$,
- $a = 5.79 \times 10^{10}$ m,
- $e = 0.206$ ($\rightarrow$ a Merkúrnak van a legnagyobb excentricitása a Naprendszer bolygói között).

Tudjuk, hogy $c = \sqrt{k^2 m_{\mathrm{N}} a(1-e^2)}$, illetve hogy a pericentrumban $r = r_{\mathrm{p}} = a(1-e)$. Ezekből a szögsebesség:

$$\dot{\phi} = \frac{c}{r^2} = \frac{\sqrt{k^2 m_{\mathrm{N}} a(1-e^2)}}{a^2(1-e)^2} = \frac{\sqrt{6.67 \times 10^{-11} \cdot 2 \times 10^{30} \cdot 5.79 \times 10^{10} \cdot (1-0.206^2)}}{\left(5.79 \times 10^{10}\right)^2 \left(1-0.206\right)^2} = 1.29 \times 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{20}$$

A megoldás mögött húzódó általános fizikai elvként érdemes megemlíteni, hogy a "$c = r^2\dot{\phi}$ =const." összefüggés nem más, mint Kepler II. törvénye matematikai alakban (az egyenlőségjel jobb oldalán található mennyiség a vezérsugár által súrolt terület egységnyi idő alatt).

Deme Barnabás, 2019