Műholdak pályaelemei

Ebben a fejezetben a műholdak mechanikájával és megfigyelésével ismerkedünk meg, azaz összekapcsoljuk az égi mechanikai tudásunkat az égi koordináta-rendszerek terén szerzett ismereteinkkel.

1. Matematikai alapok

Mindenekelőtt definiálunk egy térbeli koordináta-rendszert: helyezkedjen el az x-tengely az égi egyenlítő síkjában és mutasson a tavaszpont felé; legyen erre merőleges - ugyancsak az égi egyenlítő síkjában - az y-tengely; a z- pedig álljon merőlegesen az égi egyenlítő síkjára, az előző két tengellyel jobbsodrású rendszert alkotva. A metszéspontjaik, vagyis az origó a Földdel (pontosabban annak tömegközéppontjával) essen egybe. Definíció szerint a δ deklináció az égi egyenlítő feletti szögmagasságot, vagyis a polárszöget adja meg, míg az α rektaszcenzió az égi egyenlítőre vett talppont tavaszponttól vett szögtávolságát, vagyis az azimutot. A térbeli helyvektor tehát így írható fel a δ és α gömbi koordnátákkal:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\delta)\cos(\alpha) \\ r\cos(\delta)\sin(\alpha) \\ r\sin(\delta) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ahol r a helyvektor hossza, vagyis $r = \sqrt{\mathbf{rr}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
Keringjen egy tetszőleges $\{a, e, i, \omega, \Omega\}$ pályaelemekkel rendelkező műhold a Föld körül. A pályaellipszisére illeszkedő ("kényelmes") koordinátái könnyen meghatározhatók a már ismert módon:

$$\xi = r\cos(v) \tag{2}$$

$$\eta = r\sin(v), \tag{3}$$

ahol a ξ- és η-tengelyek rendre a nagy- és kistengelyekkel esnek egybe, az origó pedig itt is a Föld. Ezekből a térbeli koordináták egy transzformációs mátrixszal való szorzás után adódnak:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

ahol az együtthatók - ugyancsak már ismert módon -:

- $P_x = \cos(\omega)\cos(\Omega) - \sin(\omega)\sin(\Omega)\cos(i)$,
- $P_y = \cos(\omega)\sin(\Omega) + \sin(\omega)\cos(\Omega)\cos(i)$,
- $P_z = \sin(\omega)\sin(i)$,
- $Q_x = -\sin(\omega)\cos(\Omega) - \cos(\omega)\sin(\Omega)\cos(i)$,
- $Q_y = -\sin(\omega)\sin(\Omega) + \cos(\omega)\cos(\Omega)\cos(i)$,
- $Q_z = \cos(\omega)\sin(i)$.

A(z) (1) és (4) egyenletek összevetésével formálisan is látszik, hogy az így megkapott térbeli helykoordinátákat már ki is fejezetük a deklinációval és a rektaszcenzióval. Ha most szeretnénk meghatározni ez utóbbiakat, vagyis a második egyenlítői koordinátákat a műhold adott időpillanatbeli helyvektorából, akkor lényegében invertálni kell a(z) (1) vektor komponenseit:

$$\sin(\delta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{5}$$

$$\cos(\delta) = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2}. \tag{6}$$

A δ deklinációt szinuszának és koszinuszának ismeretében már egyértelműen kiszámolhatjuk. Ezután a rektaszcenziót hasonlóképpen megkaphatjuk a

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r\cos(\delta)} = \frac{x}{r\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2}} \tag{7}$$

és a

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r\cos(\delta)} = \frac{y}{r\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2}} \tag{8}$$

képletek segítségével.

2. Fizikai korrekciók

Bár ezeket a feladatok során nem vesszük majd tekintetbe, de azért érdemes megjegyezni, hogy a műholdak számtalan különböző forrásból származó perturbációt elszenvednek a Föld körüli keringésük során. Közismert módon pl. az **általános relativitáselmélet** nyújtotta korrekciókat már számításba kell venni ahhoz, hogy a GPS-rendszerek elfogadható pontossággal működjenek; a legjelentősebb perturbáció viszont a **Föld lapultságá**ból származik.

A kepleri ellipszispálya kizárólag ideális kepleri erőtér ($F \propto 1/r^2$) esetén valósul meg (azaz soha). A Newton-féle héjtétel értelmében ilyen potenciálja egyedül a tömegpontoknak van, illetve - nemtriviális módon - a kiterjedt, de gömbszimmetrikus objektumoknak. Nem is túl szigorú értelemben véve a Föld egyik kategóriába sem sorolható: alakja forgási ellipszoid, emiatt pedig a körülötte keringő műholdak sem tökéletes ellipszispályán keringenek. Kimutatható, hogy egy bizonyos **kritikus inklináció** alatt a pályaellipszis prográd, felette pedig retrográd irányban elforog (vagyis **precesszál**). A jelenség - legalábbis matematikailag - nagyon hasonlít a Kozai–Lidov-mechanizmusra (ott a perturbáció egy harmadik testből, itt pedig a lapultságból ered).

3. Feladatok

3.1.

Határozzuk meg az alábbi geostacionárius műhold II. és I. egyenlítői koordinátáinak időfüggését!
Adatok:

- $a = 36000$ km,
- $e = 0$,

- $i = 0°$,
- ω és Ω nincs értelmezve (mivel a pálya kör és az alapsíkban fekszik).

3.1.1. II. egyenlítői koordináták (deklináció, rektaszcenzió)

Először is: mivel $e = 0$, ezért $v = E = M = nt$, ahol $n = a^{-3/2}\left(k^2 m_{\mathrm{F}}\right)^{1/2}$ a középmozgás. Másodszor: a pályaelemekből adódóan a "kényelmes" és "kényelmetlen" koordináta-rendszerek egybeesnek, azaz

$$x = \xi = r\cos(v) = a\cos(nt), \tag{9}$$

$$y = \eta = r\sin(v) = a\sin(nt), \tag{10}$$

$$z = 0. \tag{11}$$

A műhold tehát a $t = 0$ pillanatban az x-tengelyen feküdt, vagyis a tavaszpont irányában látszott. Ez nem következik a pályaelemekből, pusztán az egyszerűség kedvéért nem adtunk plusz konstanst a szinusz és koszinusz argumentumához. Behelyettesítve a(z) (5), (6) egyenletekbe:

$$\sin(\delta) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2\cos^2(nt)+a^2\sin^2(nt)+0^2}} = 0 \rightarrow \delta_1 = 0,\ \delta_2 = \pi, \tag{12}$$

$$\cos(\delta) = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\cos(nt)}{a}\right)^2+\left(\frac{a\sin(nt)}{a}\right)^2} = 1 \rightarrow \delta_1 = 0,\ \delta_2 = 2\pi. \tag{13}$$

Összevetve a szinuszból és koszinuszból származó eredményeket, látható, hogy $\delta = 0$. Ez nem is meglepő: műholdunk az egyenlítő síkjában kering (mivel $i = 0$), tehát nyilván folyamatosan rajta van az égi egyenlítőn. Ami a rektaszcenziót illeti, itt a(z) (7), (8) képletekbe helyettesítünk:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r\cos(\delta)} = \frac{a\cos(nt)}{a\cdot 1} = \cos(nt), \tag{14}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r\cos(\delta)} = \frac{a\sin(nt)}{a\cdot 1} = \sin(nt). \tag{15}$$

Az előző két egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\alpha = nt$. Itt jegyezzük meg, hogy n értéke a geostacionaritásból adódik: mivel az ilyen műholdak 1 nap alatt tesznek meg egy teljes fordulatot a Föld körül, ezért $n = 2\pi/\mathrm{nap}$.

3.1.2. I. egyenlítői koordináták (deklináció, óraszög)

A deklináció értelemszerűen ugyanaz lesz, mint az előbb: $\delta = 0$. A t_{h} óraszöget az α rektaszcenzióból az alábbi formula szerint kapjuk:

$$t_{\mathrm{h}} = S - \alpha, \tag{16}$$

ahol S a csillagidő, vagyis a tavaszpont óraszöge. A tavaszpont mozgása a (csillag)idővel egyenes arányban történik; mivel ennek periódusa ugyancsak egy (csillag)nap (hiszen látszólagos *napi* mozgásról beszélünk), ezért

$$S = S_0 + nt, \tag{17}$$

ahol n ugyanaz a középmozgás, mint az előbb, S_0 pedig a csillagidő a megfigyelés elején ($S = S_0$ ha $t = 0$). Behelyettesítve mindezt a(z) (16) egyenletbe, figyelemreméltó eredményt kapunk:

$$t_\mathrm{h} = S - \alpha = S_0 + nt - nt = S_0, \tag{18}$$

ami a deklinációhoz hasonlóan állandó. A műhold tehát sem a deklinációját, sem az óraszögét nem változtatja: ahogy azt a geostacionárius műholdaktól elvárjuk, egyhelyt marad az égen.

3.2.

Vizsgáljunk meg ugyanígy egy poláris geoszinkron holdat!
Adatok:

- $a = 36000$ km,
- $e = 0$,
- $i = 90°$,
- ω nincs értelmezve (mivel a pálya kör),
- $\Omega = 90$.

3.2.1. II. egyenlítői koordináták

A fenti feladattal teljes analógiában (csupán annyi a különbség, hogy az $x-y$ helyett az $y-z$-ben történik a körmozgás):

$$x = 0, \tag{19}$$

$$y = a\cos(nt), \tag{20}$$

$$z = a\sin(nt). \tag{21}$$

A deklinációra:

$$\sin(\delta) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{a\sin(nt)}{\sqrt{0^2 + a^2\cos^2(nt) + a^2\sin^2(nt)}} = \sin(nt), \tag{22}$$

$$\cos(\delta) = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{a\cos(nt)}{a}\right)^2} = \cos(nt). \tag{23}$$

Most újra elővehetjük azt az érvet, mint az előbb a rektaszcenzióra: a fenti két egyenletből csak az következhet, hogy $\delta = nt$. Világos persze, hogy a deklináció nem nő minden határon túl, hiszen csak egy adott intervallumon van értelmezve: $\delta \in [-90°; +90°]$. Úgy érdemes erre gondolni, hogy a műhold elmegy például a $+90°$-ig, majd ott visszafordul, tehát a deklinációja utána csökkeni fog.
A rektaszcenzióra:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r\cos(\delta)} = \frac{0}{a\cos(nt)} = 0 \to \alpha_1 = \frac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}, \tag{24}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{r\cos(\delta)} = \frac{a\cos(nt)}{a\cos(nt)} = 1 \to \alpha = \frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

azaz most a rektaszcenzióra kapunk konstans értéket: $\alpha = \pi/2$.

3.2.2. I. egyenlítői koordináták

Az előző feladathoz hasonlóan a deklináció már itt is adott,

$$\delta = nt, \tag{26}$$

csak az óraszög megállapítása van hátra. Az előző feladat alapján:

$$t_{\mathrm{h}} = S - \alpha = S_0 + nt - \frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Az eredmény érzékeltetése végett oldjuk meg a feladatot horizontális koordinátákra is! Ehhez tegyük föl az egyszerűség kedvéért, hogy $S_0 = \pi/2$ (azaz $t_{\mathrm{h}} = nt$), továbbá hogy az egyenlítőről figyeljük a műholdat: $\phi = 0°$. Behelyettesítve a műhold magasságát megadó $\sin(m) = \sin(\delta)\sin(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(t_{\mathrm{h}})$ egyenletbe:

$$\sin(m) = \cos^2(nt). \tag{28}$$

Ebből a képletből máris levonható két figyelemreméltó következtetés: 1) $t = 0$-kor $\cos^2(nt) = \cos^2(0) = 1$, azaz $\sin(m) = 1 \to m = 90°$, vagyis a műhold a megfigyelés elején a zenitben lesz; 2) mivel $\cos^2(nt) > 0$, ezért $\sin(m) > 0$, vagyis $0 < m < 90°$, tehát a műhold végig a horizont fölött fog látszani. A horizontot csak érinteni fogja, melyek időpontjait (a "keléseket" és "nyugvásokat", mikor $m = 0 \to \sin(m) = 0$) a

$$\cos^2(nt) = 0 \tag{29}$$

adja, amiből következik, hogy $nt = -\pi/2$ vagy $nt = +\pi/2$. Nagyon kell azonban vigyázni: a pólus felé közeledve az óraszög jelentése egyre kevésbé szemléletes, magában a pólusban már nem is értelmezhető. Sokkal beszédesebb az azimut. A "kelés-nyugvás" azimutjához használjuk a $\sin(A) = \cos(\delta)\sin(t_{\mathrm{h}})/\cos(m)$ összefüggést ($m = 0 \to \cos(0) = 1$):

$$\sin(A) = \frac{\cos(nt)\sin(nt)}{1} = \frac{1}{2}\sin(2nt) = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0, \tag{30}$$

vagyis a "kelés" déli, míg a "nyugvás" északi irányban történik (vagy fordítva). Vizsgáljunk meg egy köztes, $nt = 0$ (zenit) és $nt = \pi/2$ (északi horizont) közötti időpontot, például az $nt = \pi/3$-at. A műhold magassága:

$$\sin(m) = \cos^2(nt) \to m = \arcsin\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0.25 = 14.5°. \tag{31}$$

Azimutja ekkor

$$\sin(A) = \frac{\frac{1}{2}\sin(2nt)}{\cos(m)} \to A = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}\sin(2\pi/3)}{\cos(0.25)}\right) \to A_1 = 0.46 = 26.6°,\ A_2 = 2.68 = 153.4°. \tag{32}$$

Megoldásként most az A_2-t kell választanunk, mert a műhold a zenittől észak felé halad (a deklináció növekszik az idővel): mozgása során (a zenit és az északpont között) észak-nyugati irányban fog látszani. Összefoglalásképpen elmondható, hogy a műhold egy nagy 8-as alakot ír le az égen:

- Megfigyelésünk elején a zenitben tartózkodik
- Egy nyugati irányba kihajló ív mentén északon érinti a horizontot
- Az előbbi ívvel ellentétesen visszakanyarodik a zenitre

- Megismétli a folyamatot az éggömb déli felén is.

Deme Barnabás, 2020