

# Átlagolás a Kepler-pályára

## 1. Az alapok

Ebben a leckében azzal ismerkedünk meg, hogy hogyan lehet bizonyos változó égi mechanikai mennyiségeket kiátlagolni egy Kepler-pálya mentén. Ez a művelet a modern asztrodinamika sok jelentős területén előkerül.

### 1.1. Fizikai motiváció

Az égi mechanikai kéttest-probléma megoldása jól ismert: a mozgás kúpszelet alakú pályán történik, ami az energiának megfelelően lehet

- ellipszis (negatív összenergia),
- parabola (zérus összenergia) vagy
- hiperbola (pozitív összenergia).

Ha valami külső tényező, pl. egy harmadik test megzavarja a kéttest-rendszert, akkor a probléma sokszor nagyon elbonyolódik. Az esetek egy jó részében azonban a helyzet nem ilyen rossz: jó közelítéssel feltehetjük, hogy a pályaelemek (pl.  $a$ ,  $e$ , stb.) csak nagyon hosszú idő alatt változnak meg kimutathatóan, egy periódusnyi idő alatt állandónak tekinthetők. Az ilyen behatásokat hívjuk *szekuláris* (tehát csak hosszú idő eltelte után releváns) perturbációknak.

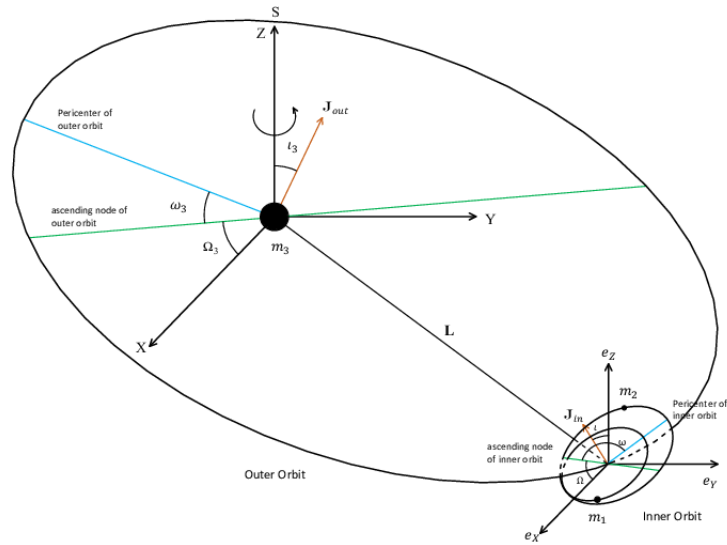
Jó példa erre az ún. **Kozai–Lidov-effektus**. Ekkor a kettősünk (pl. egy kettős feketelyuk) tömegközéppontja egy harmadik objektum (pl. egy szupermasszív feketelyuk) körül kering (ld. 1. ábra). Első közelítésben két olyan ellipszispályával van dolgunk, melynek geometriai jellemzői állandók: mind a belső (tehát a sima, sztelláris feketelyuk-kettős), mind a külső (ami a sztellárs kettős tömegközéppontjának pályája a szupermasszív körül) pálya perturbálatlannak tűnik. Második közelítésben azonban kimutatható, hogy a pályaelemek mégsem konstansok: szekuláris időskálán pl. az excentricitás oszcillál, azaz a pálya hol lapultabb, hol gömbölydedebb. Ennek oka nyilván az, hogy a szupermasszív feketelyuk lassan, de végül jelentősen forgatónyomatéket fejt ki a belső kettősre.

Egy másik példa lehet az ún. **rezonáns relaxáció**. Ez olyan elrendeződésre vonatkozik, amikor csillagok sokasága egy szupermasszív fekete lyuk körül kering (ld. 2. ábra). Mivel ezek a csillagok domináns módon a fekete lyuk gravitációját érzik, egymásét viszont alig, első közelítésben a pályáik konstans ellipszisnek tekinthetők. Pályaperiódusuknál jóval hosszabb ideig figyelve őket azonban azt tapasztaljuk, hogy pályaelemeik mégsem állandók: pályalapultságaik ebben az esetben is változnak az idővel. Ennek oka szintén az, hogy a csillagok egymás közti kölcsönhatása gyenge ugyan, de hosszú időskálán ezek az apró perturbációk felhalmozódnak, és eltorzítják az eredeti ellipszispályát.

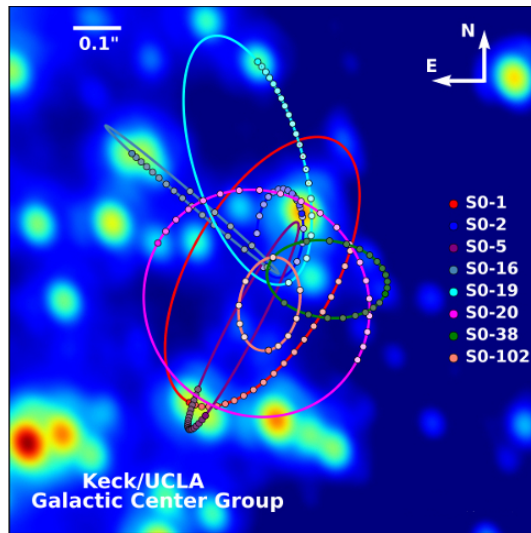
Hasonlóan bevilágító példa még a **virialtétel**: ezt részletesebben ki is fejtjük a feladatok után.

### 1.2. Matematikai háttér

A Kozai–Lidov-effektus, valamint a rezonáns relaxáció mozgásegyenleteinek levezetéséhez bonyolult Hamilton-függvényeket kell kiátlagolni egy Kepler-periódusra. Mi a műveletet egy jóval egyszerűbb függvényen, a vonzócentrumtól vett  $r$  távolságon mutatjuk be, ami a virialtétel "bizonyításához" is elég lesz.



1. ábra. A Kozai-Lidov-mechanizmus elrendezése. A belső kettős ( $m_1$  és  $m_2$  az "inner orbit"-on) tömegközéppontja kering a harmadik test körül (azaz az  $m_3$  körül az "outer orbit"-on). A belső ellipszis pályalapultsága nem állandó, a pályaperiódusál sokkal hosszabb, ún. szekuláris időskálán hol nő, hol csökken. Forrás: Fang 2019



2. ábra. Csillagpályák a galaxisunk középpontjában. Állandó ellipsziseknek tűnnek, de szekuláris idő alatt eltorzulnak. Forrás: UCLA Galactic Center Group

### 1.2.1. Az excentrikus anomália szerinti átlag

Kimutatható, hogy míg a  $v$  valódi anomáliától az  $r$  távolság az

$$r(v) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v)} \quad (1)$$

képlet szerint függ, addig az  $E$  excentrikus anomáliától így:

$$r(E) = a(1 - e \cos(E)). \quad (2)$$

Ennek ismeretében könnyen megkaphatjuk a középponttól vett távolság excentrikus anomália szerinti átlagát:

$$\langle r \rangle_E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - e \cos(E)) \, dE = \frac{1}{2\pi} \left( a \int_0^{2\pi} dE - ae \int_0^{2\pi} \cos(E) \, dE \right) = \frac{1}{2\pi} (a \cdot 2\pi - ae \cdot 0) = a. \quad (3)$$

Intuitíve tehát azt is mondhatjuk, hogy a fél-nagy tengely nem más, mint a vonzócentrumtól vett távolságok egyfajta átlaga.

### 1.2.2. A középanomália szerint vett átlag

Mint ismeretes, az excentrikus és középanomáliát a Kepler-egyenlet kapcsolja össze:

$$E - e \sin(E) = M. \quad (4)$$

Deriváljuk most a fenti egyenlet mindkét oldalát  $E$  szerint:

$$\frac{d}{dE} (E - e \sin(E)) = 1 - e \cos(E) = \frac{dM}{dE}, \quad (5)$$

majd "szorozzuk be" a második egyenlőséget  $dE$ -vel:

$$(1 - e \cos(E)) \, dE = dM. \quad (6)$$

Innen már szépen látható, hogy egy függvény  $M$  szerinti integrálja egyenlő a függvény " $1 - e \cos(E)$ "-vel vett szorzatának  $E$  szerinti integráljával. Alkalmazzuk ezt újfent az  $r$  függvényre:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle_M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \, dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - e \cos(E))(1 - e \cos(E)) \, dE = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - 2e \cos(E) + e^2 \cos^2(E)) \, dE = \frac{1}{2\pi} \left( a \int_0^{2\pi} dE - 2ae \int_0^{2\pi} \cos(E) \, dE + ae^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(E) \, dE \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (a \cdot 2\pi - 2ae \cdot 0 + ae^2 \cdot \pi) = a \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Az eredmény nem egyezik meg azzal, amit az excentrikus anomália szerinti átlagból kaptunk. Ennek a matematikai oka az, hogy más változó szerint integráltunk ( $E$  helyett  $M$  szerint). A fizikai ok viszont még szemléletesebb: mivel  $M = nt$ , ezért  $dM/dt = n = \text{const.} \rightarrow dM = n \, dt$ , azaz a középanomália szerint vett integrál (tehát átlag) egyenesen arányos az időintegrállal (tehát időátlaggal). Ez azt jelenti, hogy az  $r$  átlagolásánál nagyobb súllyal esnek latba azok az értékek, amiknél a Kepler-pályán keringő test több időt tölt. Mivel Kepler II. törvényének értelmében ezek az apocentrumhoz közeli távolságok (a bolygó lassabban mozog naptávolban, mint napközben), ezért a nagy  $r$ -ek "elhúzzák" az  $M$  szerinti átlagot az  $a$  középérték fölé. Ezért van az, hogy  $\langle r \rangle_M > \langle r \rangle_E$ .

## 2. Feladatok

### 2.1.

Számítsuk ki az  $r^2$  függvény excentrikus anomália szerinti átlagát!

A megoldás technikailag igen hasonló ahhoz, mint amit a középanomália szerinti átlagolásnál már csinál-

tunk:

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle_E &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - e \cos(E))^2 dE = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - 2e \cos(E) + e^2 \cos^2(E)) dE = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( a^2 \int_0^{2\pi} dE - 2a^2 e \int_0^{2\pi} \cos(E) dE + a^2 e^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(E) dE \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (a^2 \cdot 2\pi - 2a^2 e \cdot 0 + a^2 e^2 \cdot \pi) = a^2 \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right). \quad (8)\end{aligned}$$

**Figyelem**, ez a példa rámutat egy nagyon fontos dologra, nevezetesen hogy  $\langle r^2 \rangle_E \neq (\langle r \rangle_E)^2$ !

## 2.2.

Számítsuk ki az  $1/r$  függvény valódi anomália szerinti átlagát!

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(1 - e \cos(E))} (1 - e \cos(E)) dE = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} dE \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a} 2\pi = \frac{1}{a}. \quad (9)\end{aligned}$$

Itt is igaz az a nemtriviális állítás, hogy  $\langle 1/r \rangle_M \neq 1/\langle r \rangle_M$ .

## 2.3.

Számítsuk ki az  $x$  koordináta  $E$  szerinti átlagát (feltéve, hogy az  $x$ -tengely az ellipszis nagytengelye mentén fekszik)!

Az ellipszis geometriájából adódik, hogy

$$x = a(\cos(E) - e), \quad (10)$$

azaz

$$\langle x \rangle_E = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} a \cos(E) - ae dE \right) = \frac{1}{2\pi} \left( a \int_0^{2\pi} \cos(E) dE - ae \int_0^{2\pi} dE \right) = \frac{1}{2\pi} (a \cdot 0 - ae \cdot 2\pi) = -ae. \quad (11)$$

Érdeemes a most kapott eredményen elmerengeni egy picit:  $ae$  éppen az ellipszis fókusz-távolsága, vagyis az ellipszistengelyek metszéspontjának és a fókuszpontnak a távolsága. Tekintve, hogy az origó (és persze a gravitációs vonzócentrum) az utóbbiban foglal helyet,  $-ae$  éppen a tengelyek metszéspontjának, vagyis az ellipszis "valódi" középpontjának a koordinátája.

## 2.4.

Számítsuk ki a sebesség (jelöljük most  $v$ -vel) négyzetének középanomália szerinti átlagát!

Örvendetes módon ez a feladat visszavehető a(z) 2.2. feladatra, ugyanis az energia

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (12)$$

ahol  $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ ; a második egyenlőséget tovább alakítva megkapjuk, hogy

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}. \quad (13)$$

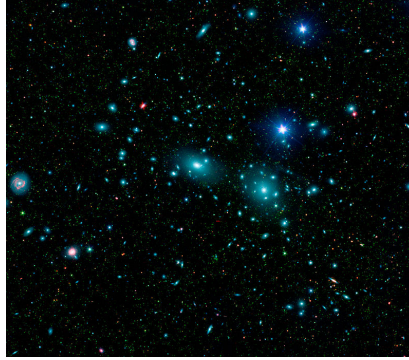
Ezek alapján

$$\langle v^2 \rangle_M = \left\langle \frac{2\mu}{r} \right\rangle_M - \left\langle \frac{\mu}{a} \right\rangle_M = 2\mu \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_M - \frac{\mu}{a}, \quad (14)$$

ahol a  $2\mu$  tényezőt és a  $\mu/a$  tagot azért emelhetjük ki az átlagolás alól, mert konstansok. Mivel a(z) 2.2 feladat alapján  $\langle 1/r \rangle_M = 1/a$ , ezért

$$\langle v^2 \rangle_M = 2\mu \frac{1}{a} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a}. \quad (15)$$

### 3. A viriáltétel



3. ábra. A Coma-galaxishalmaz, melynek vizsgálatából Zwicky a sötét anyag létére következtetett.  
Forrás: Wikipédia.

Az alábbiakban kiszámoljuk a  $K = v^2/2$  mozgási, valamint a  $V = -\mu/r$  potenciális energiák egy Kepleri periódusra vett időátlagát, majd elmélyedünk a kapott eredményben.

Mivel az idő szerinti átlag lényegében a középanomália szerinti integrálással egyenértékű, ezért a(z) 2.4 feladatot felhasználva

$$\langle K \rangle_M = \left\langle \frac{1}{2}v^2 \right\rangle_M = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle_M = \frac{1}{2} \frac{\mu}{a}. \quad (16)$$

Ugyanígy számolva a potenciális energia átlagát, támaszkodva a(z) 2.2 feladatban kapott eredményre:

$$\langle V \rangle_M = \left\langle -\frac{\mu}{r} \right\rangle_M = -\mu \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_M = -\frac{\mu}{a}. \quad (17)$$

Az előző két egyenletből tisztán látszik, hogy

$$2\langle K \rangle + \langle V \rangle = 0, \quad (18)$$

ahol a  $\langle \dots \rangle$  jelentheti mind az időre, mind pedig természetesen a középanomáliára vett átlagot. Az így kapott formulát, amit **virialtételnek** hívunk, most az egyszerű kepleri kéttest-rendszerre vezetjük le, de bizonyítható tetszőlegesen sok testből álló rendszerekre is (pici módosítással). Jelentősége óriási: az ideális gázok állapotegyenletétől kezdve az összehúzódó, csillagképző molekulafelhők energiamérlegén át

a galaxishalmazok tömeg-fényesség-relációjáig rengeteg dologra használható.

Érdemes kiemelni a legutolsó példát: Zwicky a Coma-galaxishalmaz galaxisainak mérte a sebességét (ld. 3. ábra), valamint fényességük alapján becsülte a tömegüket. Előbbiből a  $K$  mozgási, utóbbiból a  $V$  gravitációs potenciális ("kötési") energiát tudta meghatározni. A viriáltétel alapján arra számított, hogy  $-V \approx 2K$ , a mérésből viszont az jött ki, hogy  $-V \ll 2K$ . Az eltérést úgy magyarázta, hogy nagy mennyiségű *sötét anyag* található a galaxishalmazon belül, melynek fénye ugyan nincs, de a gravitációs potenciális energiához nagyban hozzájárul.

Deme Barnabás, 2020