Pályát jellemző szögek meghatározása

1. Alapvető összefüggések

Amennyiben adottak az x, y, z, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ és $v_z = \dot{z}$ hely- és sebességkoordináták, akkor ezekből a pályaelemek néhány egyszerű képlet segítségével meghatározhatók.

1.1. Fél-nagytengely, excentricitás

Mivel a fél-nagytengely és az excentricitás független a referencia-tengelyek (x, y, z) irányától, ezért kitüntetett pályaelemekként kezelendők. Kiszámításuk - korábban már ismertetett módon - az energia és perüdlet felhasználásával történik:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2(m_1 + m_2)}{r}, \tag{1}$$

$$c = (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Természetesen $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ és $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$, a $\mathbf{c}$ vektor kompnensei pedig - a vektoriális szorzás definíciójából adódóan -:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A perdület-vektor egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy merőleges a pályasíkra.
Miután az energiát és a perdületet kiszámoltuk, a fél-nagytengely és az exentricitás:

$$a = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{2h} \tag{4}$$

valamint

$$e = \sqrt{1 + 2h\frac{c^2}{k^4(m_1 + m_2)^2}}. \tag{5}$$

Megjegyzendő - ugyancsak ismétlésként -, hogy az excentricitást a Laplace-vektroból is megkaphajtuk: $e = \lambda/(k^2(m_1 + m_2)) = (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)^{1/2}/(k^2(m_1 + m_2))$. Ehhez a Laplace-vektor komponenseit így fejezhetjük ki:

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r}\mathbf{r} + \mathbf{v} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r}x + c_z v_y - c_y v_z \\ -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r}y + c_x v_z - c_z v_x \\ -\frac{k^2(m_1+m_2)}{r}z + c_y v_x - c_x v_y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Míg a perdület-vektor geometriai jellegzetessége abban rejlik, hogy merőleges a pályasíkra, a Laplace-vektor fontos tulajdonsága az, hogy a pericentrumba mutat (néha excentricitás-vektornak is nevezik emiatt).

1.2. A pályát jellemző szögek

A fentiek ismeretében a pályát jellemző szögek - amik már függnek a referencia-tengelyek irányától - könnyen megkaphatók.
Az inklináció:

$$i = \arctan\left(\frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{c_z}\right). \tag{7}$$

A fenti kifejezés értelmezéséhez érdemes megjegyezni, hogy $\sqrt{c_x^2 + c_y^2}$ nem más, mint a $\mathbf{c}$ vektornak az alapsíkra ($x - y$–sík) vett, míg c_z az erre merőleges ($z-$) tengelyre mért vetülete. Ez azt jelenti, hogy az inklináció lényegében azt mutatja meg, hogy a $\mathbf{c}$ vektor mennyire van elhajolva ("inklinálva") a z-tengelytől.
A csomóvonal hossza:

$$\Omega = \arctan\left(-\frac{c_x}{c_y}\right). \tag{8}$$

Az inklinációval analóg módon ez azt mutatja, hogy a $\mathbf{c}$ vektor alapsíkra vett vetülete mennyire tér el az x-tengelytől.
Mivel a pericentrumot a Laplace-vektor iránya jelöli ki, ezért - érthető módon - formulájában annak komponensei jelennek meg:

$$\omega = \begin{cases} \arctan\left(\frac{c\lambda_z}{c_x\lambda_y - c_y\lambda_x}\right) & \text{ha } \cos(i) \neq 0 \\ \\ \arctan\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_y}\sin(\Omega)\right) & \text{ha } \cos(i) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

2. Feladatok

2.1.

Adott egy Nap körül keringő űrszonda az alábbi adatokkal:

- $x = 2$ AU,
- $y = 0$,
- $z = 0$,
- $v_x = 0$,
- $v_y = 4.44\ \frac{\text{AU}}{\text{év}}$,
- $v_z = 0$,
- $k^2 m_\odot = 4\pi^2$ az égi mechanikai egységrendszer miatt.

Mik lesznek a pályaelemei?
Az űrszonda kezdetben az x-tengelyen fekszik, sebességvektora pedig erre merőleges (y irányú). Mint az azonnal belátható, sebességvektorának nagysága éppen a körpályának megfelelő első kozmikus sebességgel egyenlő: $v_{1\text{k}} = \sqrt{k^2 m_\odot / r} = \sqrt{4\pi^2/1} = 4.44$ AU/év. Ebből azonnal adódik, hogy fél-nagytengelye meg fog egyezni az állandó nagyságú sugárral ($a = r = 2$ AU), illetve hogy pályalapultsága nulla lesz ($e = 0$). Az is könnyen látható, hogy az űrszonda nem fog kilépni az $x - y$–síkból (mivel kezdetben

rajta helyezkedett el, továbbá sem a sebesség-, sem a gyorsulás-vektora nem mutatott ki belőle), emiatt pedig az inklináció szintén zérus lesz ($i = 0$), a pericentrum argumentuma valamint a csomóvonal hossza pedig értelmetlennek adódik (mivel a pályasík egybeesik az alapsíkkal, nem lesz csomó/metszésvonal, a pericentrumot pedig emiatt nem fogjuk tudni honnan mérni).
Az energiára adódik, hogy

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\odot}{r} = \frac{1}{2} \cdot 4.44^2 - \frac{4\pi^2}{2} = -9.88\ \frac{\mathrm{AU}^2}{\text{év}^2}. \tag{10}$$

Innen a fél-nagytengely:

$$a = -\frac{k^2 m_\odot}{2h} = -\frac{4\pi^2}{2(-9.88)} = 2\ \mathrm{AU}, \tag{11}$$

ami várakozásainknak megfelelően megegyezik a körpálya sugarával.
A perdület-vektort a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4.44 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 4.44 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.88 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{AU}^2}{\text{év}}. \tag{12}$$

Maga a perdület ezek után $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 8.88^2} = 8.88\ \mathrm{AU}^2/\text{év}$. Innen az excentricitás:

$$e = \sqrt{1 + 2h\frac{c^2}{(k^2 m_\odot)^2}} = \sqrt{1 + 2(-9.88)\frac{8.88^2}{(4\pi^2)^2}} = 0, \tag{13}$$

vagyis a pálya tényleg egy nulla lapultságú ellipszis (kör). A perdület-vektor komponenseiből már az inklináció és a csomóvonal hossza is megkapható:

$$i = \arctan\left(\frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{c_z}\right) = \arctan\left(\frac{0^2 + 0^2}{8.88}\right) = 0, \tag{14}$$

vagyis a pályasíkra merőleges $\mathbf{c}$ nem hajlik el a z-tengelytől (a pályasík valóban benne van az x–y–síkban);

$$\Omega = \arctan\left(-\frac{c_x}{c_y}\right) = \arctan\left(-\frac{0}{0}\right), \tag{15}$$

ami a $0/0$ hányados miatt tényleg értelmetlen.
A Laplace-vektor komponensei:

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k^2 m_\odot}{r}x + c_z v_y - c_y v_z \\ -\frac{k^2 m_\odot}{r}y + c_x v_z - c_z v_x \\ -\frac{k^2 m_\odot}{r}z + c_y v_x - c_x v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4\pi^2}{2} \cdot 2 + 8.88 \cdot 4.44 - 0 \cdot 0 \\ -\frac{4\pi^2}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 8.88 \cdot 0 \\ -\frac{4\pi^2}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.051 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{AU}^3}{\text{év}^2}, \tag{16}$$

nagysága pedig: $\lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2} = \sqrt{(-0.051)^2 + 0^2 + 0^2} = 0.051\ \mathrm{AU}^3/\text{év}^2$. Ennek segítségével már a pericentrum argumentuma is megkapható, kiindulva abból, hogy $\cos(i) = \cos(0) = 1 \neq 0$:

$$\omega = \arctan\left(\frac{c\lambda_z}{c_x\lambda_y - c_y\lambda_x}\right) = \arctan\left(\frac{8.88 \cdot 0}{0 \cdot 0 - 0 \cdot (-0.051)}\right) = \arctan\left(\frac{0}{0}\right), \tag{17}$$

ami szintén értelmetlen a 0/0 tört miatt.

2.2.

Az előző feladat mesterséges számadatai után most nézzük egy Föld körül keringő műhold reálisabb esetét. A feladat itt is a pályaelemek meghatározása.
Adatok:

- $x = 22000$ km,
- $y = 20000$ km,
- $z = -1000$ km,
- $v_x = 0.5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$,
- $v_y = 1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$,
- $v_z = 3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$,
- $k^2 m_{\mathrm{F}} = 398332\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}$.

Fölhasználva, hogy $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{22000^2+20000^2+(-1000)^2} = 29718.95$ km, és hogy $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \sqrt{0.5^2+1^2+3^2} = 3.2$ km/s, egyrészt megkapjuk az energiát

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_{\mathrm{F}}}{r} = \frac{1}{2}\cdot 3.2^2 - \frac{398332}{29718.95} = -8.26\ \frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{s}^2}, \tag{18}$$

másrészt az energiából a fél-nagytengelyt:

$$a = -\frac{k^2 m_{\mathrm{F}}}{2h} = -\frac{398332}{2(-8.26)} = 24112.1\ \mathrm{km}. \tag{19}$$

Az impulzus-momentum komponensei:

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000\cdot 3 - (-1000)\cdot 1 \\ (-1000)\cdot 0.5 - 22000\cdot 3 \\ 22000\cdot 1 - 20000\cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61000 \\ -66500 \\ 12000 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{s}}, \tag{20}$$

nagysága pedig $c = \sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2} = \sqrt{61000^2+(-66500)^2+12000^2} = 91034\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}$, melyekből az inklináció

$$i = \arctan\left(\frac{\sqrt{c_x^2+c_y^2}}{c_z}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{61000^2+(-66500)^2}}{12000}\right) = 82.43^\circ, \tag{21}$$

továbbá a csomóvonal hossza

$$\Omega = \arctan\left(-\frac{c_x}{c_y}\right) = \arctan\left(-\frac{61000}{-66500}\right) = 42.53^\circ. \tag{22}$$

Végezetül, előbb kiszámoljuk a Laplace-vektor komponenseit és nagyságát:

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} x + c_z v_y - c_y v_z \\ -\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} y + c_x v_z - c_z v_x \\ -\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} z + c_y v_x - c_x v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{398332}{29718.95} \cdot 22000 + 12000 \cdot 1 - (-66500) \cdot 3 \\ -\frac{398332}{29718.95} \cdot 20000 + 61000 \cdot 3 - 12000 \cdot 0.5 \\ -\frac{398332}{29718.95} \cdot (-1000) + (-66500) \cdot 0.5 - 61000 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -83075 \\ -90796 \\ -80860 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2} \to \lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2} = \sqrt{(-83075)^2 + (-90796)^2 + (-80860)^2} = 147250 \ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}; \tag{23}$$

ebből pedig - egyetemben az előzőekkel - (mivel $\cos(i) = \cos(82.43°) = 0.13 \neq 0$):

$$\omega = \arctan\left(\frac{c\lambda_z}{c_x\lambda_y - c_y\lambda_x}\right) = \arctan\left(\frac{91034 \cdot (-80860)}{61000 \cdot (-90796) - (-66500) \cdot (-83075)}\right) = 33.64°. \tag{24}$$

Deme Barnabás, 2019