Mozgás kúpszelet alakú pályákon

1. Alapvető összefüggések

Mint az ismeretes, a vonzócentrumtól vett távolsággal fordítottan arányos gravitációs potenciálban a mozgás kúpszelet alakú pályákon történik. Két alapvető esetet különböztetünk meg. Ha a pályaperdület nulla, akkor a pálya nem görbül (az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ vektorok párhuzamosak), vagyis egyenes mentén történő mozgást kapunk. Ha viszont a perdület nemnulla, akkor három aleset fordulhat elő: negatív energiánál kötött elliptikus pályát és 1-nél kisebb pályalapultságot, nulla energiánál egy parabolává szétnyíló ellipszist és egységnyi excentricitást, végül pozitív összenergiánál hiperbolát és 1-nél nagyobb pályalapultságot kapunk.
Összefoglalva:

- $c \neq 0$
  - $h < 0 \rightarrow 0 \leq e < 1 \rightarrow$ elliszis,
  - $h = 0 \rightarrow e = 1 \rightarrow$ parabola,
  - $h > 0 \rightarrow 1 < e \rightarrow$ hiperbola,
- $c = 0 \rightarrow e = 1 \rightarrow$ egyenes.

Fontos hozzáfűzni, hogy egyenes mentén lefolyhat gravitációsan nem kötött mozgás is.

1.1. Kozmológiai kitekintés

Érdekes módon a Kepler-probléma

$$\ddot{r} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r^2} \tag{1}$$

egyenlet által leírt egyenesvonalú esetének kozmológiai alkalmazása is van. Az Einstein-egyenletet ugyanis az Univerzum egészére alkalmazva a

$$\frac{2GM}{a^3} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \tag{2}$$

Friedmann-egyenlethez jutunk (M a Világegyetem össztömege, k a görbületi (nyíltsági/zártsági) paraméter, az $a(t)$ függvény pedig az ún. skálahossz, ami azt mutatja meg, hogy mennyire van kitágulva az Univerzum); ezt a^2-tel megszorozva, majd újból deriválva azt kapjuk, hogy

$$2\dot{a}\ddot{a} = -\frac{2GM\dot{a}}{a^2} \rightarrow \ddot{a} = -\frac{GM}{a^2}, \tag{3}$$

ami a(z) (1) egyenlettel teljesen analóg. Szokás mondani emiatt, hogy a Világegyetem sorsát a földobott kőéhez hasonlíthatjuk:

- a kő visszaesik $\sim$ az Univerzum tágulása visszafordul;
- a kő a végtelenbe száll ("görbe" analogonja a parabola), ahol a sebessége nulla $\sim$ az Univerzum örökké tágul, de a végtelenben megáll;
- a kő a végtelenbe száll ("görbe" analogonja a hiperbola), ahol a sebessége véges $\sim$ az Univerzum örökké tágul, és még a végtelenben is lesz sebessége.

Nagyon fontos kiegészítés, hogy a(z) (2) egyenletet ma már kiegészítik a kozmológiai állandóval, ez azonban kvalitatíve nem változtat a kimeneteleken.

2. Ellipszis

Adott egy műhold a Föld középpontjától 6608 km távolságra. Merőleges irányú, 10.95 km/s-os kezdősebességgel indítjuk útjára. Mikor éri el a Hold távolságát (384000 km)?
Adatok:

- $r = 6608$ km,
- $v = 10.95 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$,
- $\alpha = 90°$,
- $k^2 m_\text{F} = 398603 \ \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$.

A fent használható mértékegységek nem az SI alapegységei ("m" helyett "km" szerepel), és nem is égi mechanikaiak ("AU", stb.). Ennek ellenére használhatók, mivel egységesek (mindenhol "km" szerepel távolságegységként).
A feladatot kétféleképpen oldjuk meg.

2.1.

Megszokott módon az energia és a fél-nagytengely kiszámításával kezdünk:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\text{F}}{r} = \frac{1}{2} \cdot 10.95^2 - \frac{398603}{6608} = -0.37 \ \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}, \tag{4}$$

majd

$$a = -\frac{k^2 m_\text{F}}{2h} = -\frac{398603}{2(-0.37)} = 538650 \text{ km}. \tag{5}$$

A megszokottól eltérő módon az excentricitás innen akár már a perdület kiszámítása nélkül is megkapható. Kiindulva abból, hogy a hely- és a sebességvektor csak a peri- és apocentrumban merőleges egymásra, továbbá abból, hogy nyilván nem az apocentrumból indulunk (hiszen a távolságunk növekszik), azonnal kapjuk, hogy

$$r = r_\text{p} = a(1 - e), \tag{6}$$

ahonnan

$$e = 1 - \frac{r_\text{p}}{a} = 1 - \frac{6608}{538650} = 0.988. \tag{7}$$

A fél-nagytengely és az excenticitás ismeretében kiszámíthatjuk a kérdéses távolság ($r = 384000$ km) valódi anomáliáját a kúpszeletek fokális egyenletéből:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(v)} \to v = \arccos\left(\frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right)\right) =$$
$$\arccos\left(\frac{1}{0.988}\left(\frac{538650(1-0.988^2)}{384000} - 1\right)\right) = 2.93 \text{ rad}. \tag{8}$$

Innen az excentrikus anomália:

$$E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0.988}{1+0.988}}\tan\left(\frac{2.93}{2}\right)\right) = 1.26\ \text{rad}. \tag{9}$$

Kihasználva, hogy az indítás a 0. időpillanatban történt ($t_\mathrm{p} = 0$), a Kepler-egyenlet így egyszerűsíthető: $E - e\sin(E) = n(t - t_\mathrm{p}) \to E - e\sin(E) = nt$. Az idő kiszámításához már csak a középmozgást kell meghatároznunk:

$$n = \sqrt{\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{a^3}} = \sqrt{\frac{398603}{538650^3}} = 1.6 \times 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}}, \tag{10}$$

így végül

$$t = \frac{E - e\sin(E)}{n} = \frac{1.26 - 0.988\sin(1.26)}{1.6 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^5\ \mathrm{s} = 55\ \text{óra}. \tag{11}$$

2.2.

Írjuk föl az energiára vonatkozó két összefüggésünket:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\mathrm{F}}{r} = -\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{2a}. \tag{12}$$

Átrendezve v^2-re a jobboldali egyenlőséget:

$$v^2 = k^2 m_\mathrm{F}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{13}$$

Bontsuk föl v^2-et radiális és tangenciális összetevőre Pitagorász tétele alapján:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \tag{14}$$

ahol természetesen az első tag felel meg a radiális sebességnek, a második pedig (ami a sugár és a szögsebesség szorzata) a tangenciálisnak. ϕ itt ideiglenesen a középanomália szerepét tölti be: azért nem v-vel jelöljük, hogy ne keverjük a sebességgel. $\dot{\phi}$ eliminálható a konstant perdület segítségével: $c = r^2\dot{\phi} \to \dot{\phi} = c/r^2$, vagyis

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v^2 - r^2\dot{\phi}^2} = \sqrt{k^2 m_\mathrm{F}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{c^2}{r^2}}, \tag{15}$$

ahol a perdület értéke a pericentrumban ($\alpha = 90° \to \sin(\alpha) = 1$) könnyen meghatározható: $c = rv\sin(\alpha) = 6608 \cdot 10.95 = 72358\ \mathrm{km}^2/\mathrm{s}^2$.
(15) egy szeparábilis differenciálegyenelet, amit könnyen szétbonthatunk nehéz integrálokra:

$$\int_{t_\mathrm{p}=0}^{t} \mathrm{d}t = \int_{r_\mathrm{p}}^{r} \frac{1}{\sqrt{k^2 m_\mathrm{F}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{c^2}{r^2}}}\mathrm{d}r. \tag{16}$$

A baloldal könnyen kiértékelhető: egyszerűen a mozgáshoz szükséges t időt adja. A jobboldal numerikusan számolható ki:

$$t = \int_{6608}^{384000} \frac{1}{\sqrt{398603\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{538650}\right) - \frac{72358^2}{r^2}}}\mathrm{d}r = 2 \times 10^5\ \mathrm{s}, \tag{17}$$

ami természetesen - kerekítve - megegyezik a másik módszer segítségével kapott eredménnyel.

3. Hiperbola

Adott egy Nap körül mozgó üstökös az alábbi adatokkal:

- $r = 1$ AU,
- $v = 10\ \frac{\mathrm{AU}}{\text{év}}$,
- $\alpha = 80°$,
- $k^2 m_\odot = 4\pi^2$ az égi mechanikai egységrendszer miatt.

3.1.

Határozzuk meg az üstökös fél-nagytengelyét és excentricitását!
Az energia:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_\odot}{r} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 - \frac{4\pi^2}{1} = +10.522\ \frac{\mathrm{AU}^2}{\text{év}^2}. \tag{18}$$

Nagyon fontos, hogy az energia pozitív előjelű, tehát a mozgás gravitációsan nem kötött (a $v^2/2$ kinetikus tag dominál a $-k^2 m_\mathrm{F}/r$ fölött). A mozgás tehát hiperbola alakú pályán fog történni (ld. 1. ábra), ami nem zárt, és ezért értelemszerűen nem is periodikus (az üstökös a végtelenből érkezik, majd a napközelség után oda is távozik). A félnagytengely kiszámításához ilyenkor az alábbi képletet kell használni:

$$a = +\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{2h} = +\frac{4\pi^2}{2 \cdot (+10.522)} = 1.876\ \mathrm{AU}. \tag{19}$$

Az excentricitás kiszámításához ugyanazt a formulát vehetjük igénybe, mint az ellipszisnél, de ehhez előbb ismerni kell a perdületet is:

$$c = rv\sin(\alpha) = 1 \cdot 10 \sin(80°) = 9.85\ \frac{\mathrm{AU}^2}{\text{év}}, \tag{20}$$

így

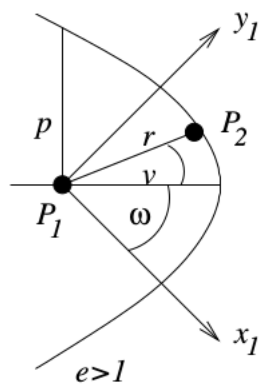
$$e = \sqrt{1 + 2h\frac{c^2}{k^4 m_\odot^2}} = \sqrt{1 + 2 \cdot (+10.522)\frac{9.85^2}{(4\pi^2)^2}} = 1.5199. \tag{21}$$

Fontos különbség a korábbiakhoz képest, hogy bár ugyanazt a képletet használtuk, itt a pályalapultság egynél nagyobb.

3.2.

Határozzuk meg a pericentrum-távolságot valamint a valódi anomália maximumát!
A fél-nagytengely és az energia kapcsolatát leíró képlet ("$a = \pm k^2 m_\mathrm{F}/(2h)$") mellett a hiperbolára vonatkozó fokális egyenletben is van egy fontos előjel-változás:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos(v)}. \tag{22}$$



1. ábra. Hiperbola-pálya. P_1-ben van a vonzócentrum (Nap), P_2-ben a mozgó égitest (bolygó). Forrás: Érdi Bálint: A Naprendszer dinamikája

Innen a pericentrum-távolság (ami $v = 0$-nak felel meg, vagyis $\cos(v) = 1$) már gyorsan megkapható:

$$r_\mathrm{p} = \frac{a(e+1)(e-1)}{1+e} = a(e-1) = 1.876(1.5199-1) = 0.97533 \text{ AU}. \tag{23}$$

Figyeljük meg, hogy a pericentrumra vonatkozó képlet csak egy előjelben különbözik az ellipszisre vonatkozó összefüggéstől. Érdemes rácsodálkozni, hogy a pericentrum-távolság (r_p) majdnem egyenlő a feladat által kitűzött távolsággal (r), ami nem meglepő, hiszen a hely- és sebességvektorok közötti szög ($\alpha = 80°$) már majdnem $90°$ (mely értéket egzaktul majd a pericentrumban éri el).

Tanulmányozva a(z) 1. ábrát, némi fantáziával szembetűnik, hogy míg r minden határon túl nőhet, v (ami tehát értelemszerűen a valódi anomália, nem keverendő a sebességvektor nagyságával) egy konkrét értékhez (v_max) tart:

$$\lim_{v \to v_\mathrm{max}} r = \lim_{v \to v_\mathrm{max}} \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos(v)} = \infty. \tag{24}$$

Azonnal látszik, hogy r eldivergálását a nevező nullához tartása okozza. Innen megkapható a valódi anomália maximális értéke:

$$1 + e\cos(v_\mathrm{max}) = 0 \to v_\mathrm{max} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{1.5199}\right) = 2.28 \text{ rad} = 131.14°. \tag{25}$$

Érdemes elmerengeni a legutóbbi a formulán, ami érthetőbbé teszi, hogy az excentricitás hogyan jellemzi a hiperbola lapultságát: ha e-vel tartunk a végtelenbe, $-1/e$ konvergál nullához a negatív irányból, vagyis

$$\lim_{e \to \infty} \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = 90°, \tag{26}$$

mivel $0 = \cos(90°)$. Vagyis az excentricitás növekedésével a hiperbola egyre inkább kiegyenesedik, míg végül egy nagytengelyre merőleges egyenes lesz belőle. Egyenest tehát kétféleképpen is kaphatunk a kéttest-problémában: ha $c = 0$ (ekkor $e = 1$) vagy ha $e \to \infty$.

4. Egyenes vonalú mozgás

Vizsgáljuk az egyenes vonalú, gravitációsan kötött mozgást ($h < 0$). Mivel a szögsebesség nulla, $v^2 = \dot{r}^2$ (ahol a v sajnos megint a sebesség nagysága), vagyis az energia:

$$h = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{k^2(m_1 + m_2)}{r} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{2a}, \tag{27}$$

ahol "a" a fél-nagytengely szerepét tölti be, de nehéz egyértelmű jelentést tulajdonítani neki (valahogy úgy, mint az M középanomáliának az elliptikus mozgásnál). Az ellipszis esetében bemutatott esettel teljesen megegyező módon (2.2. fejezet) ez így alakítható át:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{k^2(m_1 + m_2)}\sqrt{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}, \tag{28}$$

ami a(z) (15) egyenlettől csak annyiban különbözik, hogy itt $c = 0$ (mivel a mozgás egyenesvonalú). Szétválasztva a differenciálegyenletet:

$$\int \sqrt{k^2(m_1 + m_2)}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}}\mathrm{d}r = \int \sqrt{\frac{r}{2 - \frac{r}{a}}}\mathrm{d}r. \tag{29}$$

Ez az integrál könnyen elvégezhető az $r = a(1 - \cos(E))$ helyettesítéssel, ahol E matematikai értelemben "távoli rokona" az ellipszis esetében bevezetett excentrikus anomáliának (bár nem egy szög):

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(a - a\cos(E)\right) = a\sin(E) \to \mathrm{d}r = a\sin(E)\mathrm{d}E = a\sqrt{1 - \cos^2(E)}\mathrm{d}E, \tag{30}$$

vagyis

$$\sqrt{k^2(m_1 + m_2)}t = \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos(E))}{2 - (1 - \cos(E))}}a\sqrt{1 - \cos^2(E)}\mathrm{d}E. \tag{31}$$

Innen

$$(k^2(m_1 + m_2))^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}t = \int \sqrt{\frac{(1 - \cos(E))(1 + \cos(E))(1 - \cos(E))}{1 + \cos(E)}}\mathrm{d}E = \int 1 - \cos(E)\mathrm{d}E = E - \sin(E) + K, \tag{32}$$

ahol K integrálási konstans. Vagyis a Kepler-egyenlet radiális (és kötött) mozgásra vonatkozó analogonja:

$$E - \sin(E) = (k^2(m_1 + m_2))^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}t + K. \tag{33}$$

4.1.

Számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt zuhanna a Hold a Földbe, ha hirtelen megszűnne a pályamenti sebessége!
Adatok:

- $m_\mathrm{H} \approx 0$ (mivel tömege a Földének csupán 81-ed része),
- $k^2 m_\mathrm{F} = 398603\ \frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}^2}$,

- $r = 384000$ km (ami a Hold távolsága),
- $v = 0\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Az energia és a "fél-nagytengely":

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_{\text{F}}}{r} = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{398603}{384000} = -1.038\ \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}, \tag{34}$$

valamint

$$a = -\frac{k^2 m_{\text{F}}}{2h} = -\frac{398603}{2(-1.038)} = 192010\ \text{km}. \tag{35}$$

Megvizsgálva az "$r = a(1 - \cos(E))$" kifejezést látszik, hogy $E = 0$ és $E = 2\pi$ esetén $r = 0$. Ha a feladatra úgy gondolunk, hogy "valaki a Holdat először radiálisan fölhajította, majd az elkezdett egy idő után visszaesni", akkor $E = 0$-kor van a földobás, $E = 2\pi$-kor a visszaérkezés, és értelemszerűen $E = \pi$-kor van a Hold pályája tetőpontján ($r = 384000$ km), ami feladatunkban a $t = 0$-nak felel meg. Ezeket a "Kepler-egyenletbe" helyettesítve:

$$\pi - \sin(\pi) = (k^2 m_{\text{F}})^{\frac{1}{2}} \cdot 192010^{-\frac{3}{2}} \cdot 0 + K, \tag{36}$$

ahonnan látszik, hogy esetünkben (de ez feladatfüggő) $K = \pi$. A visszaérkezés ($E = 2\pi$) időpontja ezek után úgy számolható ki, hogy a "Kepler-egyenletet" az időre rendezzük, majd behelyettesítünk:

$$t = \frac{E - \sin(E) - K}{(k^2 m_{\text{F}})^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi - \sin(2\pi) - \pi}{398603^{\frac{1}{2}} \cdot 192010^{-\frac{3}{2}}} = 418660\ \text{s}, \tag{37}$$

ami hozzávetőlegesen 4-5 napnak felel meg.

Deme Barnabás, 2019