Időfejlődés, Kepler-egyenlet

1. Az anomáliák

A kéttest-probléma ugyan integrálható, de a mozgás időfüggését nem lehet expliciten megadni. Az alábbi eljárást kell követni.

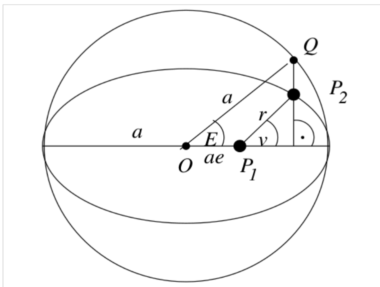
1. Kiszámítjuk az $M = nt$ középanomáliát.
   - Itt t az idő,
   - n pedig az ún. középmozgás, ami tulajdonképpen az átlagos szögsebesség: $n = 2\pi/T$, ahol T a periódusidő. Mivel Kepler 3. törvényéből
     $$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2}, \tag{1}$$
     ezért
     $$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2 a^3}}, \tag{2}$$
     azaz
     $$\frac{2\pi}{T} = n = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{a^3}}. \tag{3}$$
     Érdemes megjegyezni, hogy valójában $M = n(t - t_\mathrm{p})$, ahol t_p a pericentrumon való áthaladás időpontja, de ezt általában nullának választhatjuk.
2. Kiszámítjuk az excentrikus anomáliát az $E = M + e\sin(E)$ Kepler-egyenlet segítségével.
   - Itt e az ismertnek feltételezett excentricitás,
   - E pedig az excentrikus anomália;
   - az egyenletet iteratív módszerrel oldjuk meg.
3. Kiszámítjuk a v valódi anomáliát a $\tan(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\tan(E/2)$ egyenletből (ld. még 1. ábra).

2. Feladatok

2.1.

Egy kisbolygó fél-nagytengelye 3 AU, excentricitása 0.3. Pericentrumát 2018.10.04-én éri el. Mekkora távolságra lesz a Naptól 2019.08.03-án?
Használjuk az égi mechanikai egységrendszert (AU, naptömeg, év)! Adatok:

- $a = 3$ AU,
- $e = 0.3$,
  - $r_\mathrm{p} = a(1 - e) = 3(1 - 0.3) = 2.1$ AU,
  - $r_\mathrm{a} = a(1 + e) = 3(1 + 0.3) = 3.9$ AU,



1. ábra. Geometriai kapcsolat a valódi és excentrikus anomáliák között. A középanomáliának nincsen közvetlenül ábrázolható geometriai jelentése. Forrás: Érdi Bálint: A Naprendszer dinamikája

- $t_{\mathrm{p}} = 2018.10.04.$,
- $t = 2019.08.03.$,
  - $\Delta t = 303$ nap $= 0.83$ év,
    - $t_{\mathrm{p}} = 0 \rightarrow t = 303$ nap $= 0.83$ év,
- $\frac{k^2 m_\odot}{4\pi^2} = 1$.

Számoljuk ki először a középmozgást! Mivel az égi mechanikai egységrendszer miatt $a^3/T^2 = 1$, ezért a középmozgás $n = 2\pi\sqrt{1/a^3}$, azaz

$$n = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3^3}} = 1.21\ \frac{1}{\text{év}}. \tag{4}$$

Innen a középanomália:

$$M = nt = 1.21 \cdot 0.83 = 1.0043 \approx 1. \tag{5}$$

Ennek a mértékegysége természetesen radián.

A Kepler-egyenlet iteratív megoldásának menete a következő. Először is föltesszük, hogy $E_0 = M$; ezt követően E_0-ból kiszámoljuk E_1-et az $E_1 = M + e\sin(E_0)$ képletből. E_1 ismeretében megkapható E_2: $E_2 = M + e\sin(E_1)$. A művelet tetszőlegesen sokáig folytatható, az eredmény egy E határértékhez fog konvergálni:

$$E_1 = 1 + 0.3\sin(1) = 1.25244,$$

$$E_2 = 1 + 0.3\sin(1.25244) = 1.28493,$$

$$E_3 = 1 + 0.3\sin(1.28493) = 1.28783,$$

$$E_4 = 1 + 0.3\sin(1.28783) = 1.28807,$$

$$E_5 = 1 + 0.3\sin(1.28807) = 1.28809,$$

és így tovább...

Látható, hogy igen jó közelítéssel $E = 1.29$ rad. A $\tan(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}\tan(E/2)$ képletből:

$$v = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+0.3}{1-0.3}}\tan\left(\frac{1.29}{2}\right)\right) = 1.56. \tag{6}$$

A valódi anomália ismeretében a távolság már könnyen megkapható:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)} = \frac{3(1-0.3^2)}{1+0.3\cos(1.56)} = 2.72 \text{ AU}. \tag{7}$$

2.2.

Vizsgáljuk újfent az előbbi példa kisbolygóját. Ha $t = 0$-kor van a pericentrumban ($v = 0°$), akkor mennyi idő múlva lesz a pálya átellenes pontján, vagyis az apocentrumban ($v = 180°$)?
Adatok:

- $a = 3$ AU,
- $e = 0.3$,
  - $r_\mathrm{p} = a(1-e) = 3(1-0.3) = 2.1$ AU,
  - $r_\mathrm{a} = a(1+e) = 3(1+0.3) = 3.9$ AU,
- $\frac{k^2 m_\odot}{4\pi^2} = 1$.

A probléma kétféleképpen is megoldható.

1. Számoljuk ki a kisbolygó keringési idejét, majd osszuk el kettővel. Ez pont megfelel annak az időnek, ami alatt megtesz egy fél fordulatot (pericentrumból apocentrumba).
   A periódusidő Kepler 3. törvénye alapján:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \to T = a^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = 5.2 \text{ év}. \tag{8}$$

   Ennek a fele, vagyis a pericentrumból apocentrumba történő átmenet időbeli hossza 2.6 év.

2. Használjuk az előző feladatban szereplő algoritmus fordítottját. Mivel a szóban forgó esetben $v = 180° = \pi$ rad, ezért

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-0.3}{1+0.3}}\tan\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

   Mivel $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$, ezért nyilván $\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \infty$, ami csak úgy lehetséges, ha $E = \pi$. Ez egyébként a(z) 1. ábráról is könnyen leolvasható. Ezt az $M = E - e\sin(E)$ képletbe helyettesítve:

$$M = \pi - 0.3\sin(\pi) = \pi. \tag{10}$$

   Mivel a pericentrum-átmenet időpontját 0-nak választottuk ($t_\mathrm{p} = 0$), ezért $M = nt$. A középmozgást már az előző feladatban megkaptuk: $n = 2\pi\sqrt{1/a^3} = 2\pi\sqrt{1/3^3} = 1.21$ 1/év, vagyis

$$t = \frac{M}{n} = \frac{\pi}{1.21} = 2.6 \text{ év}, \tag{11}$$

   ami természetesen megegyezik az előző pontban kiszámított eredménnyel.

2.3.

Egy üstökös fél-nagytengelye 5 AU, excentricitása 0.05. Mekkora lesz a valódi anomáliája a pericentrum-áthaladás után 10 évvel?
Adatok:

- $a = 5$ AU,
  - Kepler 3. törvényéből: $T = a^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 11.2$ év,
- $e = 0.05$,
- $\frac{k^2 m_\odot}{4\pi^2} = 1$.

A középmozgás:

$$n = 2\pi\sqrt{\frac{1}{a^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{5^3}} = 0.56\ \frac{1}{\text{év}}. \tag{12}$$

Kihasználva, hogy $t_\mathrm{p} = 0$, azaz hogy $M = nt$, a középanomáliára azt kapjuk, hogy

$$M = 0.56 \cdot 10 = 5.6 \text{ rad}. \tag{13}$$

Ezután a Kepler-egyenlet iteratív megoldása adja az excentrikus anomáliát:

$$E_0 = M = 5.6$$

$$E_1 = M + e\sin(E_0) = 5.6 + 0.05\sin(5.6) = 5.5684,$$

$$E_2 = M + e\sin(E_1) = 5.6 + 0.05\sin(5.5684) = 5.5672,$$

$$E_3 = M + e\sin(E_2) = 5.6 + 0.05\sin(5.672) = 5.5672,$$

és így tovább...

Látható, hogy igen jó közelítéssel $E = 5.5672$ radián. Végül a feladat tárgyát képező valódi anomália:

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+0.05}{1-0.05}}\tan\left(\frac{5.5672}{2}\right) = -0.39331, \tag{14}$$

azaz

$$v = 2\tan\left(-0.39331\right) = -42.94°. \tag{15}$$

Ez az eredmény természetesen teljes mértékben ekvivalens azzal, hogy $v = 360 - 42.94 = 317.06°$: előbbi esetében a valódi anomáliát a $[0; 2\pi]$, utóbbiéban a $[-\pi; \pi]$ intervallumon értelmezzük (ami mindegy).

2.4.

Egy Nap körül keringő hipotetikus bolygó peri- és apocentruma rendre 0.9 és 1.1 AU. Számítsuk ki, hogy mennyi időt tölt el az égitest a $v \in [-\pi/2; \pi/2]$ intervallumon.
Adatok:

- $r_\mathrm{a} = 1.1$ AU,
- $r_\mathrm{p} = 0.9$ AU,

- $\frac{k^2 m_\odot}{4\pi^2} = 1.$

A feladat megoldása két nagyobb részből áll:

1. Először kiszámoljuk a fél-nagytengelyt és az excentricitást az alábbi képletekből:

$$r_\mathrm{p} = a(1-e) = 0.9, \tag{16}$$

$$r_\mathrm{a} = a(1+e) = 1.1. \tag{17}$$

Elosztva egymással a két egyenletet eliminálhatjuk a fél-nagytengelyt:

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{0.9}{1.1} = 0.82. \tag{18}$$

Átrendezés után:

$$1 - e = 0.82(1+e) \rightarrow e = 0.1. \tag{19}$$

Visszahelyettesítve ezt az $a(1+e) = 1.1$ egyenletbe, kapjuk, hogy

$$a(1+0.1) = 1.1 \rightarrow a = 1 \text{ AU}. \tag{20}$$

2. Ezután kiszámoljuk a kérdéses intervallumon eltöltött τ időt. A rendszer szimmetriájából adódóan mind a $v \in [-\pi/2; 0]$, mind a $v \in [0; \pi/2]$ intervallum egyaránt $\tau/2$ ideig tart, ezért elég előbbit meghatározni.
Ha $v = \pi/2$ radián, akkor

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{v}{2}\right) \rightarrow E = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-0.1}{1+0.1}} \tan\left(\frac{\pi/2}{2}\right)\right) = 1.471 \text{ rad}. \tag{21}$$

A Kepler-egyenletből ezután

$$M = E - e\sin(E) = 1.471 - 0.1\sin(1.471) = 1.371. \tag{22}$$

A középmozgásra a fél-nagytengely ismeretében

$$n = 2\pi\sqrt{\frac{1}{a^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1^3}} = 6.28 \ \frac{1}{\text{év}} \tag{23}$$

adódik. Innen már az $M = nt$ formula segítségével megkaphatjuk a t-nek megfelelő $\tau/2$-t:

$$\frac{\tau}{2} = \frac{M}{n} = \frac{1.371}{6.28} = 0.218 \rightarrow \tau = 0.436 \text{ év}. \tag{24}$$

Érdemes belegondolni, hogy mivel az év hossza kizárólag a fél-nagytengelytől függ, ezért a Földhöz hasonlóan ezen a hipotetikus bolygón is 1 év a periódusidő. A most kiszámolt időtartam ennek valamivel kevesebb, mint a fele. Mivel a fenti intervallumon eltöltött idő az évszakok hosszával van összefüggésben, ezért levonható a következtetés, hogy az ilyen jellegű éghajlati aszimmetria a pályalapultsággal van kapcsolatban.

Deme Barnabás, 2019