A kéttest-probléma alapképletei

1. Első integrálok

A kéttest-probléma annak meghatározását foglalja magában, hogy miként mozog két tömegpont, ha egymással gravitációs kölcsönhatásban állnak. Ez matematikailag a következőképpen foglalható össze:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = k^2 \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}), \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_\mathbf{2} = -k^2 \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}), \tag{2}$$

ahol m jelöli a tömeget, $\mathbf{r}$ a helyvektort, $k^2 (= G)$ a gravitációs állandó.

Ez egy 12-ed rendű differenciálegyenlet-rendszer, aminek megoldásához első integrálok szükségesek. Minden egyes első integrál 1-gyel csökkenti az egyenletrendszer rendjét; összesen 11-re van szükségünk. Ezek az alábbiak:

1. Energia-integrál (1 db)
   - $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{r}|} = h$,
     ahol $\mu = k^2(m_1 + m_2)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ és h a (tömegegységre jutó) energia, ami állandó;
2. Lendület-integrál (3 db)
   - $m_1\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} + m_2\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2} = \mathbf{a}$,
     ahol $\mathbf{a}$ a kéttest-rendszer összlendülete, ami állandó;
3. Súlyponti-integrál (3 db)
   - $m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$,
     ahol t az idő, $\mathbf{b}$ pedig konstans; ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy a kéttest-rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez;
4. Perdület-integrál (3 db)
   - $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}$,
     ahol $\times$ a vektoriális szorzás, $\mathbf{c}$ pedig a (tömegegységre jutó) perdület, ami állandó;
5. Runge - Lenz - Laplace-integrál (1 db)
   - $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\mu}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}$,
     ahol $\boldsymbol{\lambda}$ a Runge - Lenz - Laplace-vektor, ami állandó; ennek három komponense van $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, de ezek közül csak az egyik szabadon választható, mivel megköti a kezünket két további összefüggés:
     - ☐ $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{c} = 0$,
     - ☐ $|\boldsymbol{\lambda}|^2 = \mu^2 + 2h|\mathbf{c}|^2$.

1.1. Példa az első integrálok használatára

Demonstrációs jelleggel most megmutatjuk, hogyan használhatók a fenti összefüggések a deriválások eliminálására.
Az "$m_1\dot{\mathbf{r_1}} + m_2\dot{\mathbf{r_2}}$ = konstans" összefüggés fizikai jelentése az, hogy a kéttest-rendszerre nem hat külső erő, azaz nem gyorsul. A Galilei-féle relativitási elv értelmében ez azt jelenti, hogy vonatkoztatási rendszerünket rögzíthetjük a két test tömegközéppontjához. Matematikailag ez abban nyilvánul meg, hogy az "$m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$" egyenlet jobb oldala azonosan nulla: ez felel meg az origóban álló tömegközéppontnak.
Ebből már következik, hogy

$$m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2} = \mathbf{0} \to \mathbf{r_1} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r_2} \to \mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = \frac{m_1+m_2}{m_1}\mathbf{r_2}. \tag{3}$$

Ezt $\mathbf{r_2}$-re rendezve, majd behelyetetstíve a(z) (2) egyenletbe:

$$m_2\ddot{\mathbf{r_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\mathbf{r}} = -k^2\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \tag{4}$$

azaz

$$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2\frac{m_1+m_2}{r}\mathbf{r}. \tag{5}$$

A(z) (5) differenciálegyenlet már csak hatodrendű. Ehhez a lendület- és súypont-integrálokat használtuk fel (összesen hat egyenletet), amik révén hattal csökkent az egyenletrendszerben lévő differenciáloperátorok száma.

2. A kéttest-probléma megoldása

A fenti első integrálok segítségével könnyen meghatározható a(z) (1)-(2) egyenletek megoldása:

$$r = \frac{\frac{|\mathbf{c}|^2}{\mu}}{1 + \frac{|\boldsymbol{\lambda}|}{\mu}\cos(v)}. \tag{6}$$

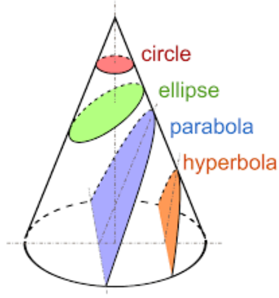
Ha bevezetjük a $p := \frac{|\mathbf{c}|^2}{\mu}$ és $e := \frac{|\boldsymbol{\lambda}|}{\mu}$ jelöléseket, akkor az

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v)} \tag{7}$$

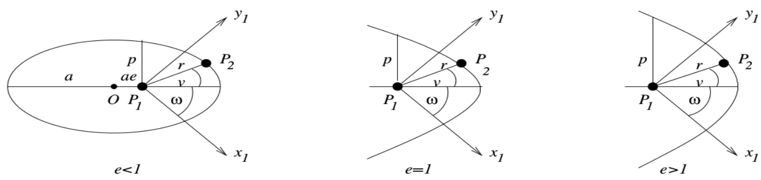
összefüggéshez jutunk, ami a geometriából ismert kúpszeletek (fokális) egyenlete (ld. 1.ábra). p a pálya paramétere, e a pálya excentricitása ("lapultsága"), v pedig tulajdonképpen egy polárszög, az ún. középanomália (ld. 2. ábra).
A kéttest-problémában tehát a testek kúpszelet alakú pályákon mozognak. Szükség van azonban a mozgás időbeli lefolyásának az ismeretére is, vagyis arra, hogy adott időpontban a testek hol vannak éppen a pálya mentén. Ennek meghatározására szolgál a Kepler-egyenlet:

$$E - e\sin(E) = M, \tag{8}$$

ahol E az excentrikus anomália, M a középanomália (ld. 3. ábra). A középanomáliának nincs szemléletes geometriai jelentése. Egyenesen arányos az idővel: $M = nt$, ahol az $n = \mu^{1/2}a^{-3/2}$ arányossági tényező



1. ábra. Kúpszeletek: kör, ellipszis, parabola, hiperbola. Forrás: Wikipedia



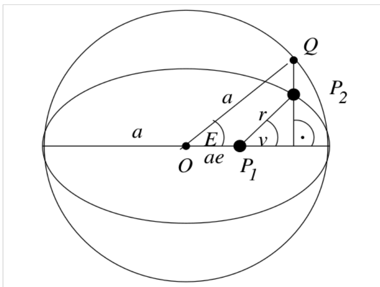
2. ábra. Ellipszis, parabola és hiperbola. P_1 a fókuszpont ($\sim$ Nap), P_2 az r hosszúságú relatív helyvektor által jelzett pont ($\sim$ bolygó), x_1 és y_1 tetszőleges descartes-i koordintáa-tengelyek, ω a pericentrum argumentuma, a a fél-nagytengely. Forrás: Érdi Bálint: A Naprendszer dinamikája

az ún. középmozgás, vagyis a pályamenti átlagos szögsebesség. Az E excentrikus és a v valódi anomália között az alábbi képlet teremt kapcsolatot:

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right). \tag{9}$$

Tehát a recept a következő: ha ismert a t idő, akkor abból megvan az M középanomália; ezután a Kepler-egyenletből meghatározható az E excentrikus anomália; innen a(z) (9). egyenletből megkapható a v középanomália. Ez utóbbi már megadja, hogy mely szögnél vagyunk a pálya mentén, és a(z) (6). képletből a távolság is meghatározható.

Deme Barnabás, 2019



3. ábra. Egy ellipszis, valamint egy hozzáhúzott ún. főkör. Forrás: Érdi Bálint: A Naprendszer dinamikája