Kozmikus sebességek, pályaelemek

A továbbiakban az $x := |\mathbf{x}|$ jelölést használjuk, ahol $\mathbf{x}$ tetszőleges vektor.

1. Első kozmikus sebesség

Első kozmikus sebességnek hívjuk a gravitációs vonzócentrum körüli egyenletes körmozgás kerületi sebességét.

Keringjen körpályán egymás körül egy m_1 és egy m_2 tömegű test a kölcsönös gravitációs erő hatására. Ekkor a tömegvonzás adja a centripetális erőt. Az origót az m_1-hez rögzítve (vagyis majd $\mathbf{r_2}$ helyett a relatív $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ vektort használva):

$$m_2 a_{\mathrm{cp}} = m_2 a_{\mathrm{gr}}. \tag{1}$$

A centripetális gyorsulás formulája jól ismert:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

A gravitációs gyorsulásra viszont nem használható egyszerűen az "$a_{\mathrm{gr}} = Gm_1/r^2$" képlet; ez csak akkor tehető meg, ha az origó pl. a tömegközéppontban van. Itt a relatív, tehát az m_1-hez mint origóhoz viszonyított gyorsulást kell használni az "$\ddot{\mathbf{r}} = -k^2(m_1 + m_2)\mathbf{r}/r^3$" mozgásegyenlet segítségével:

$$a_{\mathrm{gr}} = |\ddot{\mathbf{r}}| = k^2 \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}|^3} |\mathbf{r}| = k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^2}. \tag{3}$$

A(z) (2) és (3) egyeneleteket a(z) (1) egyeneletbe helyettesítve adódik

$$\frac{v^2}{r} = k^2 \frac{m_1 + m_2}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r}}. \tag{4}$$

Ekkora relatív sebességgel kell mozognia egy m_1 és egy m_2 tömegű, egymástól r távolságban lévő testnek ahhoz, hogy a gravitáció körpályán tartsa őket. Ez az első kozmikus sebesség.

2. Második kozmikus sebesség

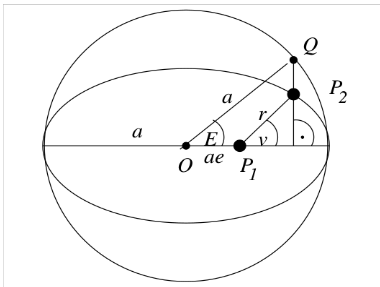
Második kozmikus sebességnek hívjuk azt a kritikus értéket, mely fölött a kéttest-rendszer szétesik, mert a kölcsönös gravitációs vonzás már nem tudja egyben tartani.

Egymás körül keringő m_1 és m_2 tömegű testek esetén az (egységnyi tömegre eső) összenergia:

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2(m_1 + m_2)}{r}, \tag{5}$$

ahol $v := |\dot{\mathbf{r}}|$. A jobboldali első tag fejezi ki a rendszer "mozgékonyságát" (fajlagos kinetikus energia), a második pedig a "kötöttségét" (fajlagos potenciális energia). Ha

- $v^2/2 < k^2(m_1 + m_2)/r$, azaz $h < 0 \rightarrow$ a rendszer kötött;
- $v^2/2 > k^2(m_1 + m_2)/r$, azaz $h > 0 \rightarrow$ a rendszer szétesik.



1. ábra. Ellipszispálya. P_1-ben van a vonzócentrum (Nap), P_2-ben a mozgó égitest (bolygó). Forrás: Érdi Bálint: A Naprendszer dinamikája

A kettő közötti átmenetkor $h = 0$. Ezt behelyettesítve a(z) (5) egyenletbe:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2(m_1 + m_2)}{r} = 0 \rightarrow v = \sqrt{2\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r}}. \tag{6}$$

Ekkora relatív sebességgel kell mozognia egy m_1 és egy m_2 tömegű, egymástól r távolságban lévő testnek ahhoz, hogy a gravitáció már éppen ne tudja őket összetartani. Ez a második kozmikus sebesség, ami az elsőnek éppen $\sqrt{2}$-szerese.

2.1. A Schwarzschild-sugár

Ha a(z) (6) egyenlet bal oldalán található sebességet a fényével tesszük egyenlővé ($v = c$), majd a képletet a sugárra rendezzük, megkapjuk, hogy milyen méretűre kell összezsúfolni egy m_{BH} tömegű objektumot ahhoz, hogy még a fény se tudjon elszökni előle:

$$r_{\mathrm{S}} = \frac{2Gm_{\mathrm{BH}}}{c^2}. \tag{7}$$

Az így kapott mennyiség, az ún. Schwarzschild-sugár, a fekete lyukak eseményhorizontjának sugarát adja. Karl Schwarzschild a vákuumra felírt Einstein-egyenleteket használta a levezetéshez: az pusztán üdítő véletlen, hogy az eredmény newtoni gondolatmenettel is kijön.
Az átlagos sztelláris fekete lyukak mérete ez alapján néhány km, míg a galaxisok nukleuszában található szupermasszívaké ennek több millió-, vagy milliárdszorosa.

3. Pályaelemek

Kötött mozgás esetén (mikor $h < 0$), amennyiben az origót az m_1-hez rögzítjük, az m_2 ellipszis alakú pályán fog mozogni (ld. 1. ábra). (Ha $h = 0$, akkor a pálya alakja egy másik kúpszelettel esik egybe: a paraboláéval. $h > 0$ esetén a mozgás hiperbola-pályán történik.)
Az ellipszist leíró két legfontosabb pályaelem:

- fél-nagytengely (a): a pálya méretét adja meg;
- excentricitás (e): a pálya lapultságát mutatja.

Mivel az ellipszis p paramétere kifejezhető a fél-nagytengely és az excentricitás segítségével ($p = a(1-e^2) = a(1+e)(1-e)$), ezért az "$r = p/(1 + e\cos(v))$" átírható:

$$r = \frac{a(1+e)(1-e)}{1+e\cos(v)}. \tag{8}$$

Ahogy az a(z) 1. ábrán is látható, a bolygó akkor kerül legközelebb a centrumhoz (pericentrum), mikor $v = 0°$. Ekkor az r_p pericentrum-távolság:

$$r_\mathrm{p} = \frac{a(1+e)(1-e)}{1+e\cos(0°)} = \frac{a(1+e)(1-e)}{1+e} = a(1-e). \tag{9}$$

Hasonlóan, a centrumtól számított legnagyobb, vagyis apocentrum-távolság $v = 180°$-nál adódik (vagyis az "átellenes" oldalon):

$$r_\mathrm{a} = \frac{a(1+e)(1-e)}{1+e\cos(180°)} = \frac{a(1+e)(1-e)}{1-e} = a(1+e). \tag{10}$$

Érdekességképpen megjegyzendő, hogy az ellipszis méretét a fél-kistengellyel (b) is jellemezhetjük (bár ez kevésbé szokás). Ezt a fentebb már említett mennyiségekkel az

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{11}$$

képlet köti össze.

3.1. Kepler 3. törvénye

Kepler 3. törvénye igen fontos összefüggést állapít meg a pálya fél-nagytengelye (a), valamint a periódusideje (T) között. Nevezetesen:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(m_1+m_2)}{4\pi^2}. \tag{12}$$

Speciálisan a Naprendszer esetében m_1 a Nap tömege, m_2 pedig valamelyik bolygóé. Mivel $m_2 \ll m_1$, (12) így módosul: $a^3/T^2 \approx k^2 m_\odot/(4\pi^2)$. Ha még ezenfelül távolságegységnek az AU-t, időegységnek az évet, tömegegységnek pedig a naptömeget választjuk, akkor $k^2 m_\odot/(4\pi^2) = 1$, azaz

$$\frac{a^3}{T^2} = 1. \tag{13}$$

4. Feladatok

4.1.

Számítsuk ki az első kozmikus sebességet a Föld felszínén, vagyis hogy mekkora sebességgel kellene vízszintesen elhajítanunk egy tárgyat (pl. kavicsot) ahhoz, hogy soha ne essen le!
Adatok:

- $m_\mathrm{F} = 5.97 \times 10^{24}$ kg,
- $m_\mathrm{k} = 5 \text{ g} \approx 0$,
- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$,
- $R_\mathrm{F} = 6371 \text{ km} = 6.371 \times 10^6$ m.

Helyettesítsünk be a(z) (4) képletbe:

$$v = \sqrt{\frac{k^2(m_\mathrm{F} + m_\mathrm{k})}{R_\mathrm{F}}} \approx \sqrt{\frac{k^2 m_\mathrm{F}}{R_\mathrm{F}}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \cdot 5.97 \times 10^{24}}{6.371 \times 10^6}} = 7900 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{14}$$

4.2.

Mekkora magasságban kell keringenie körpályán egy 10 kg tömegű műholdnak ahhoz, hogy geoszinkron legyen, vagyis hogy keringési ideje megegyezzen a Föld forgási periódusával (24 óra)?
Adatok:

- $m_\mathrm{F} = 5.97 \times 10^{24}$ kg,
- $m_\mathrm{m} = 10 \text{ kg} \approx 0$,
- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$,
- $R_\mathrm{F} = 6371 \text{ km} = 6.371 \times 10^6$ m,
- $T_\mathrm{m} = 24 \text{ h} = 86400$ s.

Az r sugarú körpálya kerülete $K = 2r\pi$. Az ennek megtételéhez szükséges idő a(z) (4) egyenletben felírt sebességgel:

$$T = \frac{K}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{\frac{k^2(m_\mathrm{F}+m_\mathrm{m})}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{k^2(m_\mathrm{F} + m_\mathrm{m})}}. \tag{15}$$

Átrendezve az r pályasugárra, valamint a műhold tömegét elhanyagolva:

$$r \approx \left(\frac{k^2 T^2 m_\mathrm{F}}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.67 \times 10^{-11} \cdot 86400^2 \cdot 5.97 \times 10^{24}}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4.22 \times 10^7 \text{ m}. \tag{16}$$

Ebből levonva a Föld sugarát kapjuk a magasságot: $H = r - R_\mathrm{F} = 35.9 \times 10^6$ m.

4.3.

Adott kettő darab csillag egymástól 5 AU (csillagászati egység) távolságban. Az egyik tömege 1 $m_\odot$ (naptömeg), a másiké 2 $m_\odot$. Előbbi sebességvektora 10 km/s nagyságú, és merőleges a csillagokat összekötő vezérsugárra; utóbbi sebességvektorának nagysága v_2, iránya az előzőével ellentétes. Mekkora lehet maximálisan v_2 ahhoz, hogy a rendszer még kötött maradjon?
Adatok:

- $m_1 = 1 \ m_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg,
- $m_2 = 2 \ m_\odot = 3.98 \times 10^{30}$ kg,

- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$,
- $r = 5\ \mathrm{AU} = 7.48 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$,
- $v_1 = -10\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = -10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \leftarrow$ az előjel önkényes, csak azt fejezi ki, hogy ellentétes irányú v_2-vel.

Helyettesítsünk be a(z) (6) képletbe:

$$v = \sqrt{2\frac{k^2(m_1+m_2)}{r}} = \sqrt{2\frac{6.67\times 10^{-11}\cdot(1.99+3.98)\times 10^{30}}{7.48\times 10^{11}}} = 3.26\times 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{17}$$

Ez azonban a relatív szökési sebességet adja meg, azaz $|\dot{\mathbf{r}_2} - \dot{\mathbf{r}_1}| = v_2 - v_1 = 3.26 \times 10^4$ m/s. Beírva v_1-et kapjuk: $v_2 = 2.26 \times 10^4$ m/s.

4.4.

Adott egy R sugarú, M tömegű bolygó. Ennek felszínén állva szeretnénk egy $m \ll M$ tömegű tárgyat földobni függőlegesen H magasságig. A bolygó gravitációján kívül minden más erőt (pl. a forgásból származó tehetetlenségi erőket) elhanyagolunk. Mekkora v_0 kezdeti sebességre van szükség? Oldjuk meg a feladatot a $H \ll R$ határesetre is!

Írjuk fel a(z) (5) egyenletben lévő energia mérlegét: a mozgás elején a sebesség v_0, a gravitációs vonzócentrumtól való távolság pedig R; a mozgás végén (a pálya tetején) a sebesség 0, a központtól vett távolság pedig $R+H$. A tárgy tömege elhanyagolható: $m \approx 0$. Behelyettesítve:

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{k^2 M}{R} = \frac{1}{2}0^2 - \frac{k^2 M}{R+H}. \tag{18}$$

Átrendezve:

$$v_0 = \sqrt{2k^2 M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right)}. \tag{19}$$

Feltéve, hogy $H \ll R$, az $1/(R+H)$ kifejezés helyettesíthető Taylor-sorának első két tagjával. Az "$f(x+\Delta x) \approx f(x) + (\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)\Delta x$" mintájára:

$$\frac{1}{R+H} \approx \frac{1}{R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{R}\right)H = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}H. \tag{20}$$

Ezt a(z) (19) képletbe helyettesítve:

$$v_0 = \sqrt{2k^2 M\left(\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}H\right)\right)} = \sqrt{2\frac{k^2 M}{R^2}H} \tag{21}$$

Fölhasználva, hogy egy bolygó felszínén $g = |\ddot{\mathbf{r}}| = k^2(M+m)|\mathbf{R}|/R^3 \approx k^2 M/R^2$, kapjuk, hogy $v_0 \approx \sqrt{2gH}$.

4.5.

Az Uránusz keringési ideje 84 év. Mekkora a fél nagytengelye?
Adatok:

- $T_{\mathrm{Ur}} = 84$ év.

A(z) (13) összefüggést használva:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \rightarrow a = T^{\frac{2}{3}} = 19.18 \text{ AU}. \quad (22)$$

4.6.

A Halley-üstökös fél-nagytengelye 17.8 AU, excentricitása 0.967. Legutóbb 1986-ban volt Nap- és Föld-közelben. Mikor lesz legközelebb? Mekkora lesz a legkisebb távolsága a Naptól? Mekkora a legnagyobb? Adatok:

- $a_{\mathrm{H}} = 17.8$ AU;
- $e_{\mathrm{H}} = 0.967$.

A(z) (13) segítségével az előző példa alapján:

$$T_{\mathrm{H}} = a_{\mathrm{H}}^{3/2} = 75.1 \text{ év}. \quad (23)$$

Ekkora periódusidő esetén legközelebb 2061-ben lesz a Nap közelében. A közöttük levő távolság ekkor a(z) (9) képlet alapján:

$$r_{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{H}}(1 - e_{\mathrm{H}}) = 0.59 \text{ AU}. \quad (24)$$

Hasonlóan adódik (10) alapján a legnagyobb naptávolság:

$$r_{\mathrm{a}} = a_{\mathrm{H}}(1 + e_{\mathrm{H}}) = 35.01 \text{ AU}. \quad (25)$$

4.7.

A Cavendish-féle gravitációs állandó értéke $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$. Váltsuk ezt át olyan mértékegységrendszerbe, melyben "m" helyett "pc", "kg" helyett "$m_\odot$", "s" helyett "10 Myr" (10^6 év) szerepel! Adatok:

- 1 m $= 3.24 \times 10^{-17}$ pc,
- 1 kg $= 5.03 \times 10^{-31}\ m_\odot$,
- 1 s $= 3.17 \times 10^{-15}$(10 Myr).

Behelyettesítve:

$$k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\left(3.24 \times 10^{-17} \text{ pc}\right)^3}{\left(5.03 \times 10^{-31}\ m_\odot\right)\left(3.17 \times 10^{-15} \text{ (10 Myr)}\right)^2} =$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11}\left(3.24 \times 10^{-17}\right)^3}{\left(5.03 \times 10^{-31}\right)\left(3.17 \times 10^{-15}\right)^2} \frac{\mathrm{pc}^3}{m_\odot \text{ (10 Myr)}^2} = 0.49 \frac{\mathrm{pc}^3}{m_\odot \text{ (10 Myr)}^2}. \quad (26)$$

Deme Barnabás, 2019