Kiegészítő anyag

1. A Kepler-egyenlet gyorsabb megoldása

A Kepler-egyenlet iteratív megoldásának többféle módja is van. Ezek közül a legkézenfekvőbb az alábbi:

$$E_{n+1} = M + e\sin(E_n). \tag{1}$$

Newton alternatív megközelítést javasolt: definiáljuk az f függvényt a következőképpen:

$$f(E) = E - e\sin(E) - M. \tag{2}$$

A Kepler-egyenlet megoldása ezáltal nem lesz más, mint az $f(E)$ függvény zérushelyének a meghatározása, melynek gyors iterációs módja:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E)}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}E}} = E_n - \frac{E_n - e\sin(E_n) - M}{1 - e\cos(E_n)}. \tag{3}$$

A megoldás különösen gyorsan fog konvergálni, ha betartjuk az alábbi feltételt:

- $e \leq 0.8 \to E_0 = M$,
- $e > 0.8 \to E_0 = \pi$.

A fentieket demonstrálandó, oldjuk meg háromféleképpen ((3)+"$E_0 = \pi$", (3)+"$E_0 = M$", (1)) a Kepler-egyenletet a következő paraméterekre: $M = 1$ és $e = 0.99$.

1. $E_0 = \pi$:
   $E_1 = \pi - (\pi - 0.99\sin(\pi) - 1)/(1 - 0.99\cos(\pi)) = 2.0654$,
   $E_2 = 2.0654 - (2.0654 - 0.99\sin(2.0654) - 1)/(1 - 0.99\cos(2.0654)) = 1.9334$,
   $E_3 = 1.9334 - (1.9334 - 0.99\sin(1.9334) - 1)/(1 - 0.99\cos(1.9334)) = 1.9276$,
   $E_4 = 1.9276 - (1.9276 - 0.99\sin(1.9276) - 1)/(1 - 0.99\cos(1.9276)) = 1.9276$.

2. $E_0 = M = 1$:
   $E_1 = 1 - (1 - 0.99\sin(1) - 1)/(1 - 0.99\cos(1)) = 2.7911$,
   $E_2 = 2.7911 - (2.7911 - 0.99\sin(2.7911) - 1)/(1 - 0.99\cos(2.7911)) = 2.0391$,
   $E_3 = 2.0391 - (2.0391 - 0.99\sin(2.0391) - 1)/(1 - 0.99\cos(2.0391)) = 1.9315$,
   $E_4 = 1.9315 - (1.9315 - 0.99\sin(1.9315) - 1)/(1 - 0.99\cos(1.9315)) = 1.9276$.

3. $E_0 = M = 1$: $E_1 = 1 + 0.99\sin(1) = 1.8331$, $E_2 = 1.8331 + 0.99\sin(1.8331) = 1.9561$,
   $E_3 = 1.9561 + 0.99\sin(1.9561) = 1.9174$,
   $E_4 = 1.9174 + 0.99\sin(1.9174) = 1.9311$,
   $E_5 = 1.9311 + 0.99\sin(1.9311) = 1.9264$,
   $E_6 = 1.9264 + 0.99\sin(1.9264) = 1.9281$,
   $E_7 = 1.9281 + 0.99\sin(1.9281) = 1.9275$,
   $E_8 = 1.9275 + 0.99\sin(1.9275) = 1.9277$,
   $E_9 = 1.9277 + 0.99\sin(1.9277) = 1.9276$.

Amint az mindhárom esetben látható, a megoldás igen jó közelítéssel $E = 1.9276$ rad. Az első kettő módszer a Newton-féle eljárás volt: a különbség csak annyi, hogy a legelsőben betartottuk az excentricitásból adódó feltételt az E_0-ra, a másodikban pedig nem. Látszik, hogy az 1. esetben tényleg gyorsabb a konvergencia: bár úgy látszik, hogy csak egy lépéssel, de négynél több tizedesjegy vizsgálatakor már markánsabb lenne a különbség.
A 3. eljárás konvergenciája tényleg feltűnően lassú.

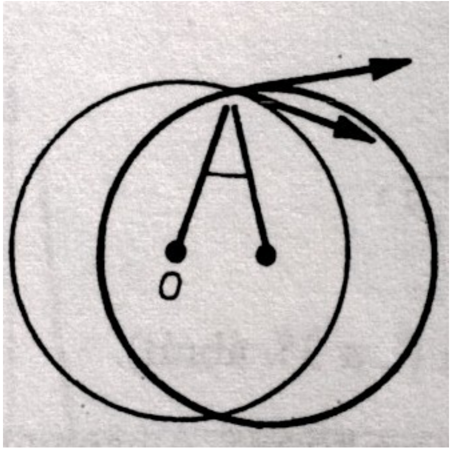
2. Műhold pályájának vizsgálata

Adott egy műhold a Föld körül az alábbi adatokkal:

- $H = 300$ km,
- $R_{\mathrm{F}} = 6371$ km,
  - $r = R_{\mathrm{F}} + H = 6371 + 300 = 6671 \text{ km} = 6.671 \times 10^6$ m,
- $m_{\mathrm{F}} = 5.97 \times 10^{24}$ kg,
- $k^2 = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$,
  - $k^2 m_{\mathrm{F}} = 3.982 \times 10^{14}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$,
- $v = \sqrt{\frac{k^2 m_{\mathrm{F}}}{r}} = \sqrt{\frac{3.982\times10^{14}}{6.671\times10^6}} = 7726\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
- $\alpha = 91°$,

ahol természetesen H a földfelszín feletti magasság. Amint látható, a műhold kezdősebessége pontosan megegyezik az első kozmikus sebességgel, vagyis ideális esetben körpályán kellene keringenie a Föld körül. Sebességvektora azonban nem pontosan merőleges a rádiuszra az indítás pillanatában, attól a Föld irányába 1°-kal eltér. Számítsuk ki, hogy mennyivel csökken így a perigeuma!
A feladatot kétféleképpen is meg lehet oldani.

1. Meghatározzuk a megmaradó mennyiségeket, azokból kiszámoljuk a pálya alakját leíró elemeket, végül ezekből a perigeumot.
   Az energia:
   $$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{k^2 m_{\mathrm{F}}}{r} = \frac{1}{2}\cdot 7726^2 - \frac{3.982\times10^{14}}{6.671\times10^6} = -2.9846\times10^7\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}. \tag{4}$$
   Innen a fél-nagytengely:
   $$a = -\frac{k^2 m_{\mathrm{F}}}{2h} = -\frac{3.982\times10^{14}}{2(-2.9846\times10^7)} = 6.671\times10^6 \text{ m}. \tag{5}$$
   Ez ugyanannyi, mint amekkora a körpálya sugara (fél-nagytengelye) lett volna ideális esetben ($\alpha = 90°$). Ez nem is meglepő, hiszen az energia csak a sebesség nagyságától függ, irányától nem.
   A perdület:
   $$c = rv\sin(\alpha) = 6.671\times10^6\cdot 7726\cdot\sin(91°) = 5.1532\times10^{10}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}. \tag{6}$$



1. ábra. Az eredeti és az elforgatott pálya. Forrás: Arnold: A mechanika matematikai módszerei

Az energia és a perdület felhasználásával az excentricitás:

$$e = \sqrt{1 + 2h\frac{c^2}{k^4 m_{\mathrm{F}}^2}} = \sqrt{1 + 2(-2.9846 \times 10^7)\frac{(5.1532 \times 10^{10})^2}{(3.982 \times 10^{14})^2}} = 0.017458. \quad (7)$$

Ez az excentricitás ugyan elég kicsiny, de egyértelműen különbözik attól az értéktől, amit az ideális esetben várnánk (körpályánál $e = 0$).
A pericentrum-távolság:

$$r_{\mathrm{p}} = a(1-e) = 6.671 \times 10^6 (1 - 0.017458) = 6.5544 \times 10^6 \text{ m} = 6554.4 \text{ km}. \quad (8)$$

Összehasonlítva ezt az ideális körpályás eset 6671 km-es értékével, kb. 117 km-es csökkenést tapasztalunk (ami a pálya méreténél egy jó nagyságrenddel kisebb, viszont a földfelszín feletti magassággal összemérhető).

2. Vlagyimir Igorjevics Arnold pongyolább, de annál elegánsabb gondolatmenetét követve (vö. Arnold: A mechanika matematikai módszerei): mivel a pálya csak nagyon minimálisan tér el a körtől, tekintsük úgy, mintha az lenne. Ebben az esetben a különbség az $\alpha = 90°$ és az $\alpha = 91°$ szögekkel történő indítások között csupán annyi, hogy utóbbinál a pálya körvonala $1°$-kal el van tolva, nagyjából úgy, ahogy egy szögre akasztott óra körlapját is el lehet egy fokkal forgatni a falon (ld. 1. ábra). Ekkor a perigeum-változás megkapható úgy, hogy kiszámoljuk az eltolódás mértékét, vagyis hogy mennyivel változott meg pl. a pálya középpontjának a helyzete (ennyivel tolódik beljebb a pericentrum is). Ez egy egyenlőszárú háromszög alapja lesz, ahol a szárak a pálya sugarai, a csúcsszög pedig az eltolódás szöge, vagyis $1°$. Az alap hosszára (jelöljük x-szel) fölírható, hogy

$$\sin\left(\frac{1°}{2}\right) = \frac{\frac{x}{2}}{6671} \rightarrow x = 116.43 \text{ km}. \quad (9)$$

Ez figyelemreméltó egyezést mutat az előző pontban levezetett eredménnyel.

3. A Bertrand-tétel

A klasszikus mechanika egyik legmélyebb tartalommal rendelkező tétele, az 1873-ban levezetett Bertrand-tétel a következőt állítja: csak két olyan erőtér létezik, amelyben minden korlátos (tehát a végtelenbe nem elszökő) pálya zárt (tehát a részecske egy idő után pontosan visszatér kiinduló helyzetébe, és újrakezdi mozgását), méghozzá a gravitációs ($F \propto -1/r^2$) és a lineáris ($F \propto -r$).
Érdekes módon mindkét esetben a zárt pály ellipszis lesz, viszont míg a gravitációs esetben a vonzócentrum az ellipszis fókuszpontjában található, addig a lineáris erőtörvénynél a tengelyek metszéspontjában ("középen").

3.1. A lineáris erőtörvény vizsgálata

Oldjuk meg a

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{10}$$

és a

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -ky \tag{11}$$

egyenleteket az alábbi kezdeti feltételekkel:

$$x(0) = A,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = V.$$

A(z) (10) és (11) egyenletek valószínűleg a fizika legtöbbet vizsgált differenciálegyeneletei. Közismerten mindkettő egy k direkciós állandójú rugóra akasztott test (harmonikus oszcillátor) mozgásegyenlete, megoldásuk pedig ebből kifolyólag - amint az visszahelyettesítéssel is gyorsan belátható - harmonikus rezgés, vagyis szinuszok és koszinuszok összege:

$$x = K_1 \sin(\sqrt{k}t) + K_2 \cos(\sqrt{k}t), \tag{12}$$

$$y = K_3 \sin(\sqrt{k}t) + K_4 \cos(\sqrt{k}t), \tag{13}$$

ahol a K-val jelölt konstansok integrálási állandók, amik a rezgések amplitúdóit írják le. Értékük a kezdeti feltételekből határozható meg:

$$x(0) = A = K_1 \sin(\sqrt{k} \cdot 0) + K_2 \cos(\sqrt{k} \cdot 0) = K_2 \to K_2 = A, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = K_1\sqrt{k}\cos(\sqrt{k} \cdot 0) - K_2\sqrt{k}\sin(\sqrt{k} \cdot 0) = K_1\sqrt{k} \to K_1 = 0, \tag{15}$$

$$y(0) = 0 = K_3 \sin(\sqrt{k} \cdot 0) + K_4 \cos(\sqrt{k} \cdot 0) = K_4 \to K_4 = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = V = K_3\sqrt{k}\cos(\sqrt{k} \cdot 0) - K_4\sqrt{k}\sin(\sqrt{k} \cdot 0) = K_3\sqrt{k} \to K_3 = \frac{V}{\sqrt{k}}. \tag{17}$$

Mindezekkel együtt a(z) (12) és (13) általános megoldások így írhatók át:

$$x(t) = A\cos(\sqrt{k}t), \tag{18}$$

$$y(t) = \frac{V}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t). \tag{19}$$

Innen már azonnal látszik, hogy

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{\frac{V^2}{k}} = \frac{A^2\cos^2(\sqrt{k}t)}{A^2} + \frac{\frac{V^2}{k}\sin^2(\sqrt{k}t)}{\frac{V^2}{k}} = \cos^2(\sqrt{k}t) + \sin^2(\sqrt{k}t) = 1, \tag{20}$$

ami egy olyan ellipszisnek az egyenlete, melynek az egyik féltengelye A, a másik pedig $V/\sqrt{k}$ nagyságú.

3.2. A Kepler-ellipszis

Írjuk át a Kepler-probléma megoldását adó ellipszis

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(v)} \tag{21}$$

fokális egyenletét - az előző pontban kapott eredménnyel való összehasonlíthatóság végett - polárkoordinátákról (r, v) derékszögűekre (ξ, η).
Az átváltó formulák a következők:

$$\xi = r\cos(v) \tag{22}$$

és

$$\eta = r\sin(v). \tag{23}$$

Ezek segítségével (21) átírható:

$$p = r\,(1 + e\cos(v)) = r + er\cos(v) = r + e\xi. \tag{24}$$

Ezt átrendezve r-re, valamint felhasználva a derékszögű koordinátákra vonatkozó $r^2 = \xi^2 + \eta^2$ összefüggést (ami tulajdonképpen Pitagorász tétele):

$$r^2 = p^2 + e^2\xi^2 - 2ep\xi = \xi^2 + \eta^2. \tag{25}$$

Átírva a jobboldali egyenlőséget:

$$\xi^2 + \frac{2pe\xi}{1-e^2} + \frac{\eta^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}. \tag{26}$$

A ξ-vel rendelkező két tagot teljes négyzetté alakítva:

$$\left(\xi + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 - \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{\eta^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}. \tag{27}$$

Jobboldalra rendezve a koordinátáktól nem függő tagokat:

$$\left(\xi + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2 + \frac{\eta^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} + \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2(1-e^2) + p^2e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}. \tag{28}$$

Végül leosztva a jobboldallal:

$$\frac{\left(\xi + \frac{pe}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1, \tag{29}$$

ami jól látható módon szintén egy ellipszis egyenlete. Tengelyeinek nagysága $p/(1-e^2)$ és $p/\sqrt{1-e^2}$. A ξ-t tartalmazó tagban jól megfigyelhető a nagy különbség az előző feladatban kapott ellipszishez képest: a tengelyek metszéspontjához viszonyítva a ξ koordináta kezdőpontja (vagyis a fókuszpontban lévő vonzócentrum) $pe/(1-e^2)$-tel el van tolva.