Az általános koordináta-rendszer

1. Alapvető összefüggések

1.1. A pálya irányultsága

Eddig csak a pálya alakját leíró elemekről beszéltünk, vagyis a méretét meghatározó a fél-nagytengelyről, illetve a lapultságát jellemző e excentricitásról. Általános esetben azonban a pálya orientációja is fontos lehet, főleg akkor, ha például többféle pályaelrendeződés is van (mint a Naprendszerben), vagy ha a pálya térbeli helyzete változik (relativisztikus hatásokból kifolyólag elfordul a pálya).
A térbeli konfigurációt leíró pályaelemek a következők:

- ω, a pericentrum argumentuma;
- i, az inklináció;
- Ω, a csomóvonal hossza,

melyeket a következőképpen kell érteni. Alapesetben koordinátarendszerünk egyik tengelye az ellipszis nagy-, másik tengelye pedig az ellipszis kistengelyével esik egybe (az origót pedig a fókuszpontba helyezzük). Előbbi mentén - hagyományos jelölésmódot alkalmazva - a ξ, utóbbi mentén az η koordinátát mérjük:

$$\xi = r\cos(v), \tag{1}$$

$$\eta = r\sin(v), \tag{2}$$

ahol v természetesen a valódi anomália (ld. 1. ábra). Ne felejtsük el továbbá, hogy maga az r rádiusz is függ a v-től, ahogy az az ellipszis fokális egyenletéből leolvasható:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}. \tag{3}$$

Ha erről egy teljesen általános koordináta-rendszerre szeretnénk áttérni, akkor rendre

- elforgatjuk ellipszisünket síkon belül ω szöggel;
- majd megdöntjük magát a síkot egy alapsíkhoz képest i szöggel;
- végül az alap- és a megdöntött sík metszésvonalát elforgatjuk Ω szöggel.

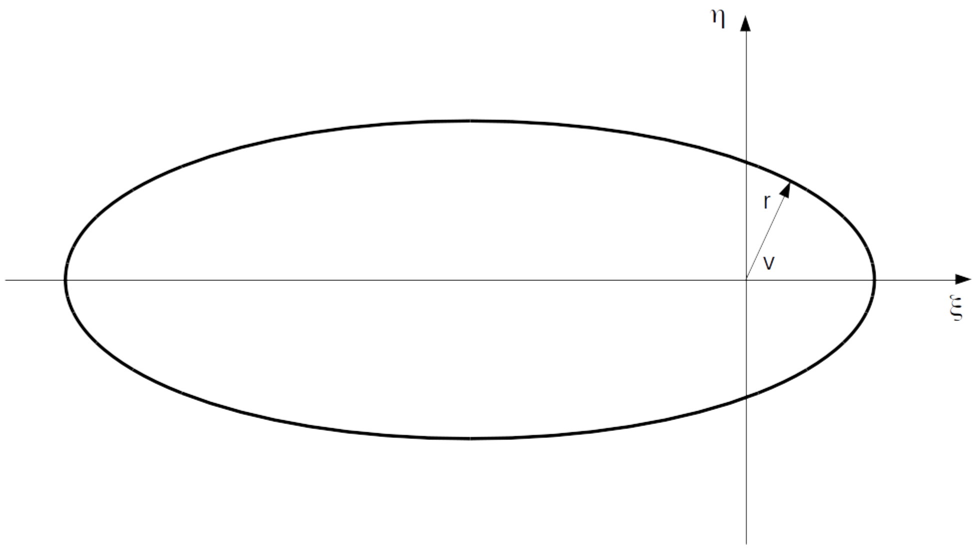
Az elforgatásokat követően a "kényelmes" ξ és η koordináták már nem használhatók, helyettük át kell térnünk a "kényelmetlen", de általános x, y és z koordinátákra. Matematikai értelemben ezt a transzformációt egy mátrixszal történő szorzás valósítja meg:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{4}$$

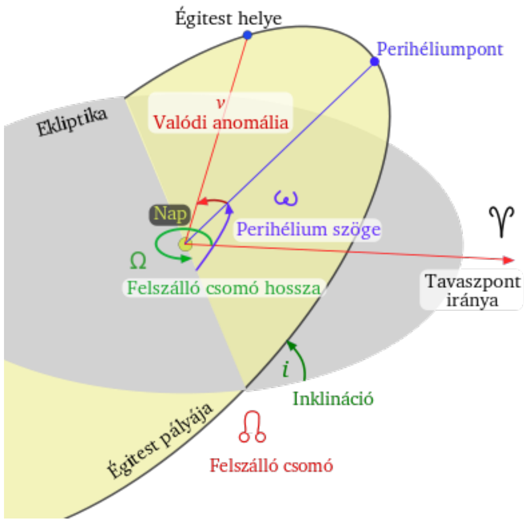
azaz

$$x = P_x\xi + Q_x\eta, \tag{5}$$

$$y = P_y\xi + Q_y\eta, \tag{6}$$



1. ábra. A "kényelmes" koordináta-rendszer. Fontos, hogy az origó nem a nagy- és kistengely metszéspontjában, hanem az ellipszis fókuszpontjában helyezkedik el.



2. ábra. Egy égitest térbeli pályaelemei (a "kényelmetlen" koordináta-rendszerben). A rajz esetében az alapsík az ekliptika, vagyis a Föld keringési síkja, x-tengelynek meg választhatjuk pl. a tavaszpont irányát. Forrás: Wikipedia

$$z = P_z \xi + Q_z \eta, \tag{7}$$

ahol a mátrix komponensei a következőféleképpen fejezhetők ki a forgatási szögekkel:

- $P_x = \cos(\omega)\cos(\Omega) - \sin(\omega)\sin(\Omega)\cos(i)$,

- $P_y = \cos(\omega)\sin(\Omega) + \sin(\omega)\cos(\Omega)\cos(i)$,
- $P_z = \sin(\omega)\sin(i)$,
- $Q_x = -\sin(\omega)\cos(\Omega) - \cos(\omega)\sin(\Omega)\cos(i)$,
- $Q_y = -\sin(\omega)\sin(\Omega) + \cos(\omega)\cos(\Omega)\cos(i)$,
- $Q_z = \cos(\omega)\sin(i)$.

Érdemes kiegészítésképpen megjegyezni, hogy a fenti mátrix oszlopait alkotó **P** és **Q** oszlopvektorok szemléletes jelentése a következő: előbbi a ξ-, utóbbi az η-tengely irányába eső egységvektor az $x - y - z$ általános ("kényelmetlen") koordinátarendszerben kifejezve.

1.2. Sebességek

Deriválva (az idő szerint) a(z) (3) egyenlet mindkét oldalát egy olyan összefüggéshez jutunk, ami a "kényelmes" és "kényelmetlen" sebességek között teremt kapcsolatot:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

ahol természetesen a mátrixelemekre nem vonatkozik a deriválás, mivel konstansok. A $\dot{\xi}$ és $\dot{\eta}$ mennyiségekre praktikus képletek vezethetők le a $\xi = a(1-e^2)\cos(v)/(1+e\cos(v))$ és az $\eta = a(1-e^2)\sin(v)/(1+e\cos(v))$ formulák idő szerinti deriválásával:

$$\dot{\xi} = a(1-e^2)\frac{-\sin(v)\dot{v}\,(1+e\cos(v)) - \cos(v)\,(-e\sin(v))\,\dot{v}}{(1+e\cos(v))^2} = -\frac{a(1-e^2)\sin(v)\dot{v}}{(1+e\cos(v))^2}. \tag{9}$$

Fölhasználva, hogy a perdület egyrészt kifejezhető "$c = r^2\dot{v} = \left((a(1-e^2))/(1+e\cos(v))\right)^2 \dot{v}$", másrészt "$c = \sqrt{k^2(m_1+m_2)a(1-e^2)}$" alakban, $\dot{v}$-ra kapjuk:

$$\dot{v} = \frac{\left(k^2(m_1+m_2)a(1-e^2)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}\right)^2} = (k^2(m_1+m_2))^{\frac{1}{2}}\frac{(1+e\cos(v))^2}{(a(1-e^2))^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Ezt beírva a(z) (8) egyenletbe:

$$\dot{\xi} = -\frac{a(1-e^2)\sin(v)}{(1+e\cos(v))^2}(k^2(m_1+m_2))^{\frac{1}{2}}\frac{(1+e\cos(v))^2}{(a(1-e^2))^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Az azonos alapú tagok összevonása után adódik:

$$\dot{\xi} = -(k^2(m_1+m_2))^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(v)}{(a(1-e^2))^{\frac{1}{2}}}. \tag{12}$$

Ugyanígy kapható $\dot{\eta}$ is:

$$\dot{\eta} = a(1-e^2)\frac{\cos(v)\dot{v}(1+e\cos(v)) - \sin(v)(-e\sin(v))\dot{v}}{(1+e\cos(v))^2} = a(1-e^2)\dot{v}\frac{\cos(v)+e}{(1+e\cos(v))^2}. \tag{13}$$

$\dot{v}$ az előzőekhez teljesen hasonló módon eliminálható:

$$\dot{\eta} = (k^2(m_1+m_2))^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(v)+e}{(a(1-e^2))^{\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Ha a(z) (11) és (13) egyenletek segítségével megkapjuk $\dot{\xi}$-ot $\dot{\eta}$-ot, akkor ezeket a(z) (7) képletbe helyettesítve nyerjük az $\dot{x}$, $\dot{y}$ és $\dot{z}$ kartezináus sebességeket.

2. Feladatok

2.1.

Adott egy üstökös az alábbi, ekliptikára vonatkozó pályaelemekkel:

- $a = 5$ AU,
- $e = 0.9$,
- $\omega = 10°$,
- $\Omega = 20°$,
- $i = 30°$.

Mik lesznek az üstökös koordinátái a pericentrumán való áthaladáskor?
Mindenekelőtt számítsuk ki a **P** és **Q** vektorok komponenseit:

- $P_x = \cos(\omega)\cos(\Omega) - \sin(\omega)\sin(\Omega)\cos(i) =$
  $= \cos(10°)\cos(20°) - \sin(10°)\sin(20°)\cos(30°) = 0.874$,
- $P_y = \cos(\omega)\sin(\Omega) + \sin(\omega)\cos(\Omega)\cos(i) =$
  $= \cos(10°)\sin(20°) + \sin(10°)\cos(20°)\cos(30°) = 0.478$,
- $P_z = \sin(\omega)\sin(i) = \sin(10°)\sin(30°) = 0.087$,
- $Q_x = -\sin(\omega)\cos(\Omega) - \cos(\omega)\sin(\Omega)\cos(i) =$
  $= -\sin(10°)\cos(20°) - \cos(10°)\sin(20°)\cos(30°) = -0.455$,
- $Q_y = -\sin(\omega)\sin(\Omega) + \cos(\omega)\cos(\Omega)\cos(i) =$
  $= -\sin(10°)\sin(20°) + \cos(10°)\cos(20°)\cos(30°) = 0.742$,
- $Q_z = \cos(\omega)\sin(i) = \cos(10°)\sin(30°) = 0.492$.

Most határozzuk meg a "kényelmes" koordinátákat. Pericentrum-áthaladáskor az üstökös rajta fekszik a nagytengelyen, vagyis az arra merőleges koordinátája zérus: $\eta = 0$. Az origó a tengelyek metszéspontjában van, ezért a nagytengelyre eső koordinátája megegyezik az onnan mért távolsággal, vagyis magával a pericentrum-távolsággal: $\xi = r_{\mathrm{p}} = a(1-e) = 5(1-0.9) = 0.5$ AU. Elvégezve a mátrixszal való szorzást adódnak az $x - y - z$ koordináták:

$$x = P_x\xi + Q_x\eta = 0.874 \cdot 0.5 + (-0.455) \cdot 0 = 0.437 \text{ AU}, \tag{15}$$

$$y = P_y\xi + Q_y\eta = 0.478 \cdot 0.5 + 0.742 \cdot 0 = 0.239 \text{ AU}, \tag{16}$$

$$z = P_z\xi + Q_z\eta = 0.087 \cdot 0.5 + 0.492 \cdot 0 = 0.0435 \text{ AU}. \tag{17}$$

2.2.

Vegyük ismét az előző feladatban szereplő üstököst. Pályájának mely pontján, vagyis a valódi anomália mely értékénél fogja átmetszeni az ekliptikát (a $z = 0$ síkot)?
Írjuk föl a z-re vonatkozó (6) egyenletet (1) és (2) felhasználásával:

$$z = P_z \xi + Q_z \eta = P_z r \cos(v) + Q_z r \sin(v) = 0. \tag{18}$$

Osszuk le a harmadik egyenlőségjel két oldalát az "$r\cos(v)$"-taggal:

$$P_z + Q_z \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = 0. \tag{19}$$

Tovább rendezve:

$$\tan(v) = -\frac{P_z}{Q_z} = -\frac{0.087}{0.492} = -0.177. \tag{20}$$

Innen a valódi anomália:

$$v = \arctan(-0.177) = -10.027^\circ. \tag{21}$$

Fontos hozzáfűzni, hogy a tangens-függvény alakjából adódóan (az "arctan()"-függvény nem egyértelmű módon képezi le a $[-1;1]$ intervallumot a $[0;2\pi]$-re) a $v = -10.027 + 180 = 169.97^\circ$ ugyanúgy megoldás. Ez érthető is: az egyik annak felel meg, mikor az üstökös felülről (a $+z$ irányából), a másik pedig annak, mikor "alulról" (a $-z$ irányából) döfi át az ekliptikát.

2.3.

Mekkora lesz az előbbi feladat üstökösének az ekliptikától számított legnagyobb magassága, vagyis a z-koordináta maximumértéke?
A feladat megoldásához a z-koordináta v valódi anomália szerinti deriváltját egyenlővé tesszük nullával. Az ebből kifejezett v megadja a derivált zérushelyét, vagyis azt a v értéket, melynél z felveszi a szélsőértékét. Ezt z-be visszahelyettesítve megkapjuk magát a szélsőértéket, ami lehet minimum és maximum is. Ebből kiválasztjuk utóbbit.
A $z(v)$-függvényhez a(z) (17) egyenletet kiegészítjük az "$r = a(1-e^2)/(1+e\cos(v))$" formulával:

$$z(v) = P_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)} \cos(v) + Q_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)} \sin(v). \tag{22}$$

Ennek deriváltja:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} = P_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}\right] \cdot \cos(v) + P_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\cos(v)\right] + \\ + Q_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}\right] \cdot \sin(v) + Q_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\sin(v)\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Elvégezve a deriválásokat, majd az eredményt egyenlővé téve nullával:

$$P_z \frac{ae(1-e^2)\sin(v)\cos(v)}{(1+e\cos(v))^2} - P_z \frac{a(1-e^2)\sin(v)}{1+e\cos(v)} + Q_z \frac{ae(1-e^2)\sin^2(v)}{(1+e\cos(v))^2} + Q_z \frac{a(1-e^2)\cos(v)}{1+e\cos(v)} = 0. \tag{24}$$

Kiemelve minden tagból az "$a(1-e^2)/\left(1+e\cos(v)\right)^2$" tényezőt:

$$\frac{a(1-e^2)}{\left(1+e\cos(v)\right)^2}\left(P_z e\sin(v)\cos(v)-P_z\left(1+e\cos(v)\right)\sin(v)+Q_z e\sin^2(v)+Q_z\left(1+e\cos(v)\right)\cos(v)\right)=0. \tag{25}$$

Fölbontva a zárójeleket, eliminálva a csak előjelben különböző tagokat, valamint fölhasználva a "$\sin^2(v)+\cos^2(v)=1$" trigonometrikus Pitagorász-tételt:

$$\frac{a(1-e^2)}{\left(1+e\cos(v)\right)^2}\left(-P_z\sin(v)+Q_z\cos(v)+Q_z e\right)=0. \tag{26}$$

Mivel a zárójel előtt álló baloldali tényező sosem lehet nulla, az egyenlet csak a következőféleképpen elégíthető ki:

$$-P_z\sin(v)+Q_z\cos(v)+Q_z e=0, \tag{27}$$

azaz

$$-P_z\sin(v)+Q_z\cos(v)=-Q_z e. \tag{28}$$

Ha az egyenlet baloldalát az "$R\sin(v+\alpha)$" alakban keressük, akkor a szinuszra vonatkozó addíciós tételből

$$R\sin(v+\alpha)=R\cos(\alpha)\sin(v)+R\sin(\alpha)\cos(v), \tag{29}$$

ami csak akkor egyezik meg (27) baloldalával, ha

$$R\cos(\alpha)=-P_z \tag{30}$$

és

$$R\sin(\alpha)=Q_z. \tag{31}$$

Összeadva az előbbi két egyenlet négyzetét (ugyancsak a trigonometrikus Pitagorász-tételből):

$$R^2=P_z^2+Q_z^2\rightarrow R=\pm\sqrt{P_z^2+Q_z^2}; \tag{32}$$

elosztva őket egymással pedig

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{Q_z}{-P_z}\rightarrow\alpha=\arctan\left(-\frac{Q_z}{P_z}\right). \tag{33}$$

Fontos megjegyezni, hogy amennyiben R esetében a $+$ előjelet választjuk, α számára a $[-\pi/2;+\pi/2]$ intervallumon kívül eső értéket kell választani az önkonzisztencia végett (vagyis a számológép által megadott számhoz π radiánt hozzá kell adni).
(27) mostmár átírható az alábbi alakra:

$$\sqrt{P_z^2+Q_z^2}\sin\left(v+\arctan\left(-\frac{Q_z}{P_z}\right)\right)=-Q_z e. \tag{34}$$

$$v=\arcsin\left(\frac{-Q_z e}{\sqrt{P_z^2+Q_z^2}}\right)-\arctan\left(-\frac{Q_z}{P_z}\right)=\arcsin\left(\frac{-0.492\cdot 0.9}{\sqrt{0.087^2+0.492^2}}\right)-\arctan\left(-\frac{0.492}{0.087}\right). \tag{35}$$

Az "arctan()"-függvényhez hasonlóan az "arcsin()" sem egyértelmű, ennek megfelelően két megoldást kapunk a valódi anomáliára:

$$v_1 = -2.8352 \text{ rad} \tag{36}$$

és

$$v_2 = 2.4848 \text{ rad}. \tag{37}$$

Amint az behelyettesítéssel belátható, előbbi a minimális, utóbbi pedig a maximális szélsőértéknek felel meg. Az ekliptika feletti maximális magasság innen úgy adódik, hogy v_2-t behelyettesítjük a(z) (21) képletbe:

$$\begin{aligned} z_{\max} = z(v_2) = P_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v_2)}\cos(v_2) + Q_z \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v_2)}\sin(v_2) = \\ 0.087\frac{5(1-0.9^2)}{1+0.9\cos(2.4848)}\cos(2.4848) + 0.492\frac{5(1-0.9^2)}{1+0.9\cos(2.4848)}\sin(2.4848) = 0.766 \text{ AU}. \end{aligned} \tag{38}$$

Deme Barnabás, 2019