A második egyenlítői koordináta-rendszer

1. Idők az asztrometriában

A csillagok helyének és járásnak leírása többféle időfogalmat igényel, melyeket az alábbiakban részletezünk.

1.1. A csillagidő

Ahogy azt már korábban láttuk, az égi egyenlítő nem más, mint a földi egyenlítő éggömbre vett vetülete. Hasonló módon lehet az éggömbre projektálni egy másik síkot, méghozzá a Föld keringési pályájáét. Az így kapott égi főkör az ekliptika.
Az ekliptika nem esik egybe az égi egyenlítővel,* hanem azt két pontban metszi: ezeket - hamarosan részletezésre kerülő okoból - tavasz- illetve őszpontnak hívjuk. Ezek az állócsillagokhoz, vagy méginkább az északi pólushoz hasonlóan rögzített pontok az éggömbön,† vagyis részt vesznek az éggömb látszólagos napi és évi körforgásában.
A csillagidő nem más, mint a tavaszpont óraszöge, jele S. Mikor a tavaszpont éppen a déli irányban látszódik, a csillagidő éppen $S = t_{\text{tavaszpont}} = 0^{\text{h}}$. A Föld egyszeri, állócsillagokhoz viszonyított körbefordulásával a tavaszpont újra a déli irányban látszik, azaz csillagidőben éppen 24^{h} telt el.
A csillagidő az az eddig hiányzó fogalom, ami összekapcsolja az óraszöget a vele analóg rektaszcenzióval, méghozzá az alábbi formulának megfelelően:

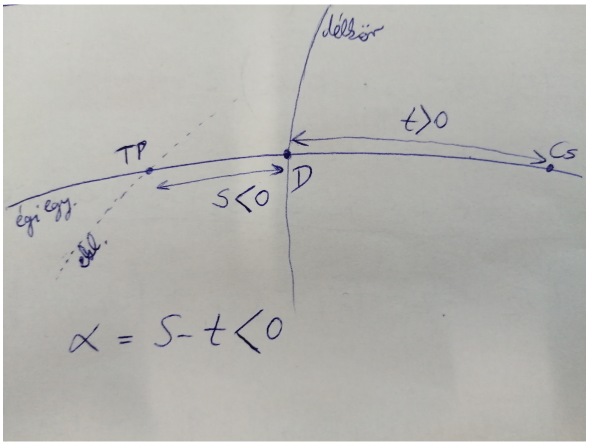
$$S = \alpha + t. \tag{1}$$

A képlet jelentése világosabbá válik, ha $\alpha = S - t$ alakra rendezzük és megvizsgáljuk a(z) 1 ábrát. A folytonos vonalak az égi egyenlítőt valamint a helyi délkört mutatják, metszéspontjukban a déli iránnyal (D). A szaggatott vonal az ekliptika egy szakasza, amely az égi egyenlítőt a tavaszpontban metszi (TP). A vizsgált csillag egyenlítőre vett talppontja (Cs) már áthaladt a déli irányon, így óraszöge pozitív. A tavaszpont ezt még nem tette meg, így óraszöge, vagyis a csillagidő egyelőre negatív.‡ A csillag rektaszcenziója, vagyis a tavaszponttól vett távolsága $\alpha = S - t$, ami így negatív szám lesz. Ez definíció szerint van így: a rektaszcenziót az óraszöggel ellentétes irányban mérjük.

1.2. A középidő

Naivan azt gondolhatjuk, hogy 24^{h} csillagidő elteltével a Nap is pontosan visszatér egy (csillag)nappal ezelőtti pozíciójába. Ez majdnem pontosan így is van, de ennyi idő alatt a Föld is haladt valamennyit pályája mentén, azaz az állócsillagokhoz, és így a tavaszponthoz képest is elfordult valamelyest. Ebből az következik, hogy a Nap és a tavaszpont folyamatosan deszinkronizálódik: mivel mindennapjainkat

*Ennek oka természetesen az, hogy a Föld forgástengelye nem merőleges a pályasíkra, hanem azzal 66.5°-os szöget zár be.
†Szerencsés módon az égi pólus, bár önmagában nem több egy szférikus geometriai fogalomnál, éppen egybeesik egy állócsillaggal, a Polarissal.
‡Az időket itt természetesen óraalgebrával kell számolni: pl. $-1^{\text{h}} = 23^{\text{h}}$.



1. ábra

luminozitási okokból az előbbihez igazítjuk, ezért célszerű bevezetni egy olyan időt, ami nagyrészt igazodik a Naphoz: ez az ún. középszoláris, vagy röviden középidő.
A rektaszcenzió mérésében lévő ellentétes irány oka is abban keresendő, hogy a Nap napról napra egyre inkább lemarad a tavaszpont mögött. A tavaszponthoz igazított csillagidő tehát gyorsabb a Naphoz igazított középidőnél. Utóbbi szabatos definíciójából[§] következik, hogy 1 középnap alatt csillagidőben $24^{\mathrm{h}}3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}$ telik el, azaz a két idő közötti váltószám:

$$\frac{\text{csillagidő}}{\text{középidő}} = \frac{24^{\mathrm{h}}3^{\mathrm{m}}56^{\mathrm{s}}}{24^{\mathrm{h}}} = 1.00273148... \tag{2}$$

Egy középnap alatt a két idő tehát 0.00273148 napnyi különbséget halmoz fel; ha ezt megszorozzuk az egy évben lévő napok számával, akkor $365.25 \times 0.00273148 \approx 1$-et kapunk, vagyis a különbözet már egy teljes (közép)nap. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a tavaszpont éppen egy év alatt körözi le teljesen a Napot (ld. lejjebb).

1.3. A csillag- és középidő összekapcsolása

Összefoglalásképpen azt mondhatjuk, hogy a középidőt az óráink mutatói jelzik, a csillagidőt pedig a tavaszpont. A gyakorlati alkalmazások végett célszerű a kettőt összekapcsolni egymással, amit az alábbi formula meg is tesz:

$$S = S_{\mathrm{G}}^{0} + \mathrm{UT} \times 1.00273148 + \lambda[...^{\mathrm{h}}...^{\mathrm{m}}...^{\mathrm{s}}]. \tag{3}$$

A formula jelentése egyszerű. S_{G}^{0} a greenwich-i csillagidőt adja meg a megfigyelés napján 0 órakor. UT a világidő, vagyis a középidő Greenwich-ben a megfigyelésünk időpontjában: értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az LT lokális középidőből kivonjuk a köztünk és Greenwich között lévő időzónák k számát, azaz $\mathrm{UT} = \mathrm{LT} - k$. UT tehát azt adja meg, hogy mennyi idő telt el Greenwich-ben 0 óra óta középidőben; az $\mathrm{UT} \times 1.00273148$ szorzat ugyanezt adja csillagidőben. Az eddigiek alapján az $S_{\mathrm{G}}^{0} + \mathrm{UT} \times 1.00273148$ azt fejezi ki, hogy mennyi a csillagidő Greenwich-ben a megfigyelésünk idején; ehhez hozzá kell még adni azt a λ járulékot (vagyis a hosszúsági körünket időegységekben felírva), ami megadja, hogy a Föld forgásából adódóan "mennyivel járunk előrébb" Greenwich-nél.

[§] Ehhez bevezették az ún. fiktív ekliptikai és fiktív egyenlítői Napot, melyek mozgását elég kacifántos függvények szabják meg.

	Tavaszi napéjegyenlőség	Nyári napforduló	Őszi napéjegyenlőség	Téli napforduló
$\delta_\odot$	$0°$	$+23.5°$	$0°$	$-23.5°$
$\alpha_\odot$	0^h	6^h	12^h	18^h

1. táblázat

2. A Nap látszólagos mozgása

Mivel az ekliptika nem más, mint a Föld Nap körüli keringési síkjának az éggömbre vetülése, ezért minimális képzelőerővel belátható, hogy a Nap mindig rajta helyezkedik el. Valójában a Föld tengely körüli forgásából adódóan a Nap naponta körbemegy az égen (az ekliptikával és az állócsillagokkal együtt), a keringésből adódóan pedig évente végigcsúszik a teljes ekliptikai főkörön.
A tavaszi napéjegyenlőségkor (kb. márc. 21-én) a Nap éppen a tavaszpontban van, vagyis rektaszcenziója 0^h. Mivel azonban folyamatosan lemarad a tavaszponthoz képest, rektaszcenziója ezt követően növekedni fog. Deklinációja ilyenkor szintén $0°$, viszont keringése során a Föld éppen úgy biccen, hogy a Nap egyre magasabbra kerül az égi egyenlítő fölé, így deklinációja szintén növekszik.¶
A nyári napfordulókor (kb. jún. 21-én) a Nap éppen negyedkörnyire ($90°$) távolodott a tavaszponttól, azaz rektaszcenziója 6^h. Egyúttal elérte legmagasabb pozícióját az égi egyenlítő fölött, deklinációja $23.5°$. Újabb negyedkör megtétele után, az őszi napéjegyenlőségkor (kb. szept. 21-én) a Nap már $180°$ távolságra van a tavaszponttól, rektaszcenziója 12^h. Ezalatt visszasüllyedt az égi egyenlítőre, deklinációja tehát $0°$. A téli napfordulókor (kb. dec. 21-én) a Nap rektaszcenziója már $18°$, az égi egyenlítőhöz viszonyítva pedig elérte mélypontját: deklinációja $-23.5°$.
A fentieket a(z) 1. táblázat foglalja össze.

3. Feladatok

3.1.

Számítsuk ki a csillagidőt Budapesten 2019. okt. 22-én 18:45:00-kor!
Adatok:

- $S_\mathrm{G}^0 = 02^\mathrm{h}00^\mathrm{m}34^\mathrm{s}$,
- $\mathrm{LT} = 18^\mathrm{h}45^\mathrm{m}00^\mathrm{s}$,
- $k = 1$,
- $\lambda_\mathrm{Bp} = 19°02'27''$.

Számítsuk ki először a világidőt, azaz a középiőt Greenwich-ben:

$$\mathrm{UT} = \mathrm{LT} - k = 18^\mathrm{h}45^\mathrm{m}00^\mathrm{s} - 1 = 17^\mathrm{h}45^\mathrm{m}00^\mathrm{s}. \tag{4}$$

¶Érdemes hozzáfűzni, hogy a deklináció egyúttal azt is megadja, hogy az adott napon a Nap melyik földi szélességi körről nézve delel éppen a zenitben.

Ennyi idő telt el Greenwich-ben az ottani éjfél óta középidőben. Most váltsuk ezt át csillagidőbe:

$$\Delta S_{\mathrm{G}} = 1.00273148 \times \mathrm{UT} = 1.00273148 \times 17^{\mathrm{h}} + 1.00273148 \times 45^{\mathrm{m}} = 17.046^{\mathrm{h}} + 45.123^{\mathrm{m}} =$$
$$= 17^{\mathrm{h}} + (0.046 \times 60)^{\mathrm{m}} + 45^{\mathrm{m}} + (0.123 \times 60)^{\mathrm{s}} = 17^{\mathrm{h}} + 2.76^{\mathrm{m}} + 45^{\mathrm{m}} + 7^{\mathrm{s}} = 17^{\mathrm{h}} + 2^{\mathrm{m}} + (0.76 \times 60)^{\mathrm{s}} + 45^{\mathrm{m}} + 7^{\mathrm{s}} =$$
$$= 17^{\mathrm{h}} + 2^{\mathrm{m}} + 46^{\mathrm{s}} + 45^{\mathrm{m}} + 7^{\mathrm{s}} = 17^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}53^{\mathrm{s}}. \quad (5)$$

Ennyi idő telt el Greenwich-ben az ottani éjfél óta csillagidőben. Ha most összeadjuk a kettőt, akkor az óraalgebra szabályai szerint

$$S_{\mathrm{G}} = S_{\mathrm{G}}^{0} + \Delta S_{\mathrm{G}} = 02^{\mathrm{h}}00^{\mathrm{m}}34^{\mathrm{s}} + 17^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}53^{\mathrm{s}} = 19^{\mathrm{h}}47^{\mathrm{m}}87^{\mathrm{s}} = 19^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}27^{\mathrm{s}}. \quad (6)$$

Ennyi a csillagidő Greenwich-ben a megfigyelésünk idején. Már csak annyi van hátra, hogy meghatározzuk azt, hogy Budapest "mennyivel jár előrébb" csillagidőben:

$$\lambda_{\mathrm{Bp}} = 19°02'27'' = \left(\frac{19}{15}\right)^{\mathrm{h}} + \left(\frac{2}{15}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{27}{15}\right)^{\mathrm{s}} \approx 1^{\mathrm{h}} + \left(\frac{4}{15}\right)^{\mathrm{h}} + \left(\frac{2}{15}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{30}{15}\right)^{\mathrm{s}} =$$
$$= 1^{\mathrm{h}} + 16^{\mathrm{m}} + 8^{\mathrm{s}} + 2^{\mathrm{s}} = 1^{\mathrm{h}}16^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}}. \quad (7)$$

Végezetül összeadjuk a két részeredményünket:

$$S_{\mathrm{Bp}} = S_{\mathrm{G}} + \lambda_{\mathrm{Bp}} = 19^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}}27^{\mathrm{s}} + 1^{\mathrm{h}}16^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}} = 20^{\mathrm{h}}64^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}} = 21^{\mathrm{h}}4^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}. \quad (8)$$

3.2.

Számítsuk ki - az előző feladat számai alapján - a Hold horizontális elhelyezkedését a második egyenlítő koordinátákból!
Adatok:

- $\delta = 18°57'27'' = 18° + (57/60)° + (27/3600)° = 18.9575°$,
- $\alpha = 9^{\mathrm{h}}7^{\mathrm{m}}6^{\mathrm{s}}$,
- $S = 21^{\mathrm{h}}4^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}}$,
- $\phi = 47.5°$.

A feladat során először a második egyenlítői koordináta-rendszerről kell áttérni az elsőre. A deklináció ugyanaz, az óraszög pedig:

$$t = S - \alpha = 21^{\mathrm{h}}4^{\mathrm{m}}37^{\mathrm{s}} - 9^{\mathrm{h}}7^{\mathrm{m}}6^{\mathrm{s}} = 12^{\mathrm{h}}(-3)^{\mathrm{m}}31^{\mathrm{s}} =$$
$$= 11^{\mathrm{h}}57^{\mathrm{m}}31^{\mathrm{s}} = 11^{\mathrm{h}} + (57/60)^{\mathrm{h}} + (31/3600)^{\mathrm{h}} = 11.95861^{\mathrm{h}} = 179.38°. \quad (9)$$

Innentől kezdve a már korábban megtanult recept a mérvadó. Számoljuk ki először a magasságot:

$$\sin m = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos t =$$
$$= \sin(47.5°)\sin(18.9575°) + \cos(47.5°)\cos(18.9575°)\cos(179.38°) = -0.3994, \quad (10)$$

amiből a magasság $\underline{m = -23.541^\circ}$ (azaz a Hold a horizont alatt van). Az azimutra vonatkozó két képlet:

$$\sin A \cos m = \cos\delta \sin t \to \sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos m} = \frac{\cos(18.9575^\circ)\sin(179.38^\circ)}{\cos(-23.541^\circ)} = 0.011163, \tag{11}$$

amiből $A_1 = 0.64^\circ$ és $A_2 = 179.36^\circ$; továbbá

$$\begin{aligned}\cos A \cos m = -\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos t \to \cos A = \frac{-\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos t}{\cos m} =\\ = \frac{-\sin(18.9575^\circ)\cos(47.5^\circ) + \cos(18.9575^\circ)\sin(47.5^\circ)\cos(179.38^\circ)}{\cos(-23.541^\circ)} = -0.99994,\end{aligned} \tag{12}$$

amiből pedig $A_1 = 179.37^\circ$ és $A_2 = 180.63^\circ$. A kettő egybevetéséből $\underline{A = 179.4^\circ}$.

3.3.

Határozzuk meg a Jupiter horizontális koordinátáit Betlehemből nézve 2019. dec. 25-én éjfélkor![‖]
Adatok:

- $\phi = 31^\circ 42' = 31^\circ + (42/60)^\circ = 31.7^\circ$,
- $\lambda = 35^\circ 12' = (35/15)^\mathrm{h} + (12/15)^\mathrm{m} \approx 2^\mathrm{h} + (5/15)^\mathrm{h} + 48^\mathrm{s} = 02^\mathrm{h}20^\mathrm{m}48^\mathrm{s}$,
- $k = 2$,
- $S_\mathrm{G}^0 = 06^\mathrm{h}08^\mathrm{m}57^\mathrm{s}$,
- $\delta = -23^\circ 15' 01'' = -23^\circ - (15/60)^\circ - (1/3600)^\circ = -23.25^\circ$,
- $\alpha = 18^\mathrm{h}20^\mathrm{m}50^\mathrm{s}$.

A $k = 2$-es időzónából kiolvasható, hogy a greenwich-i középidő a kérdéses időpontban dec. 24. 22^h. Az éjfél óta eltelt csillagidő:

$$\Delta S_\mathrm{G} = \mathrm{UT} \times 1.00273148 = 22.06^\mathrm{h} = 22^\mathrm{h} + 216^\mathrm{s} = 22^\mathrm{h}03^\mathrm{m}36^\mathrm{s}. \tag{13}$$

Ha ezt hozzáadjuk a Greenwich-ben "már alapból meglévő" csillagidőhöz ($S_\mathrm{G}^0 + \Delta S_\mathrm{G}$), majd ezt kiegészítjük még a földrajzi hosszúságból adódó "csillagidő-előnnyel" ($S_\mathrm{G}^0 + \Delta S_\mathrm{G} + \lambda[...^\mathrm{h}...^\mathrm{m}...^\mathrm{s}]$), akkor a betlehemi csillagidő:

$$S_\mathrm{G} = 06^\mathrm{h}08^{\mathrm{m}5}07^\mathrm{s} + 22^\mathrm{h}03^\mathrm{m}36^\mathrm{s} + 2^\mathrm{h}20^\mathrm{m}48^\mathrm{s} = 30^\mathrm{h}33^\mathrm{m}21^\mathrm{s} = 6^\mathrm{h}33^\mathrm{m}21^\mathrm{s}. \tag{14}$$

Az óraszöget az $S = \alpha + t$ átalakításából kapjuk:

$$\begin{aligned}t = S - \alpha = 06^\mathrm{h}33^\mathrm{m}21^\mathrm{s} - \left(18^\mathrm{h}20^\mathrm{m}50^\mathrm{s}\right) = -12^\mathrm{h} + 13^\mathrm{m} - 29^\mathrm{s} = -12^\mathrm{h} + 12^\mathrm{m} + 31^\mathrm{s} =\\ -12^\mathrm{h} + \left(\frac{12}{60}\right)^\mathrm{h} + \left(\frac{31}{3600}\right)^\mathrm{h} = -11.791^\mathrm{h} = (-11.791 \times 15)^\circ = -176.87^\circ.\end{aligned} \tag{15}$$

Nagyon figyeljünk arra, hogy a $...^\mathrm{h}...^\mathrm{m}...^\mathrm{s}$ jellegű, babiloni formátumú mennyiségeket algebrailag ($...^\mathrm{h} + ...^\mathrm{m} + ...^\mathrm{s}$)-ként kell kezelni!

[‖] A feladat kultúrtörténeti felhangja az, hogy a jelenleg legelfogadottabb tudományos értelmezés szerint a "betlehemi csillag" néven ismeretes jelenség hátterében a Jupiter és a Szaturnusz együttállása (szoros megközelítése) húzódott meg. Az esemény minden bizonnyal i.e. 6-7 környékén történt, november magasságában.

Most már minden adott a horizontális koordinátákhoz. Kezdjük a magassággal:

$$\sin m = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos t =$$
$$= \sin(31.7°)\sin(-23.25°) + \cos(31.7°)\cos(-23.25°)\cos(-176.87°) = -0.988, \quad (16)$$

amiből $\underline{m = -81.1°}$, azaz a Jupiter a horizont alatt van. Az azimut kiszámítása két képlet alapján történik:

$$\sin A \cos m = \cos\delta \sin t \rightarrow \sin A = \frac{\cos\delta \sin t}{\cos m} = \frac{\cos(-23.25°)\sin(-176.87°)}{\cos(-81.1°)} = -0.3243, \quad (17)$$

amiből $A_1 = -18.92°$ és $A_2 = 198.92°$; továbbá

$$\cos A \cos m = -\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos t \rightarrow \cos A = \frac{-\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos t}{\cos m} =$$
$$= \frac{-\sin(-23.25°)\cos(31.7°) + \cos(-23.25°)\sin(31.7°)\cos(-176.87°)}{\cos(-23.541°)} = -0.9452, \quad (18)$$

vagyis $A_1 = 161°$ és $A_2 = 199°$, tehát az azimut $\underline{A = 198.92°}$.

3.4.

Határozzuk meg a Nap középpontjának és a Merkúrnak az égrajzi távolságát 2019. nov. 12-én! Adatok:

- $\delta_{\mathrm{M}} = -16°49'21'' = -\left(16 + (49/60) + (21/3600)\right)^{\circ} = -16.822°$,
- $\alpha_{\mathrm{M}} = 15^{\mathrm{h}}01^{\mathrm{m}}06^{\mathrm{s}} = \left(15 + (1/60) + (6/3600)\right)^{\mathrm{h}} = 15.018^{\mathrm{h}} = 225.28°$,
- $\delta_{\odot} = -17°34'59'' = -\left(17 + (34/60) + (59/3600)\right)^{\circ} = -17.583°$,
- $\alpha_{\odot} = 15^{\mathrm{h}}07^{\mathrm{m}}52^{\mathrm{s}} = -\left(15 + (7/60) + (52/3600)\right)^{\mathrm{h}} = 15.131^{\mathrm{h}} = 226.97°$.

A korábbi anyagrészek alapján tudjuk, hogy a c földrajzi távolság fokokban kifejezett formulája:

$$\cos c = \sin\phi_B \sin\phi_A + \cos\phi_B \cos\phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A). \quad (19)$$

A "föld→ég" transzformáció formálisan a $\phi \rightarrow \delta$ és $\lambda \rightarrow \alpha$ helyettesítésekkel kivitelezhető:

$$\cos c = \sin\delta_B \sin\delta_A + \cos\delta_B \cos\delta_A \cos(\alpha_B - \alpha_A) =$$
$$= \sin(-17.583°)\sin(-16.822°) + \cos(-17.583°)\cos(-16.822°)\cos(226.97° - 225.28°) = 0.99951, \quad (20)$$

amiből $c = 1.78°$. Ez a napkorong fél fokos átmérőjével összevetve igen kicsi távolságnak számít, ami nem meglepő a nov. 11-i Merkúr-átvonulás fényében.

Deme Barnabás, 2020