A sajátmozgás

1. Az alapfogalmak és -összefüggések

Mivel a Tejútrendszer bonyolult gravitációs terével vannak kölcsönhatásban, az állócsillagok valójában elmozdulnak egymáshoz képest. A Földről nézve a látóirányunkra merőleges elmozdulásuk, melyet szakszóval sajátmozgásnak hívunk, csak évezredes időskálán válik feltűnővé.* A meghatározásához szükséges formulák levezetéséhez vessünk egy pillantást a(z) 1. ábrára. Az O megfigyelőtől d távolságra lévő S csillag v_t sebességgel mozog az éggömb érintőjének irányában. Δt idő alatt $\Delta\phi$ szöget, illetve Δx távolságot halad, melyek között fennáll, hogy

$$\Delta x = d \cdot \Delta\phi. \tag{1}$$

A legelemibb fizika tanúsága szerint a tangenciális sebesség

$$v_\mathrm{t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d \cdot \Delta\phi}{\Delta t} = d \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = d \cdot \mu. \tag{2}$$

A gyakorlati szempontból kényelmes mértékegységekre való áttérés után kapjuk, hogy

$$v_\mathrm{t}[\mathrm{km/s}] = 3.094 \cdot 10^{18} d[\mathrm{pc}] \cdot \frac{\mu[''/\text{év}]}{206265 \cdot 3.156 \cdot 10^7}, \tag{3}$$

ahol felhasználtuk, hogy

- 1 pc $= 3.094 \cdot 10^{18}$ km,
- 1 rad $= 206265''$,
- 1 év $= 3.156 \cdot 10^7$ s.

Kihasználva továbbá a parallaxis alapképletét, miszerint a távolság a parallaxis reciproka:

$$d[\mathrm{pc}] = \frac{1}{\pi['']}, \tag{4}$$

a kívánt végeredmény:

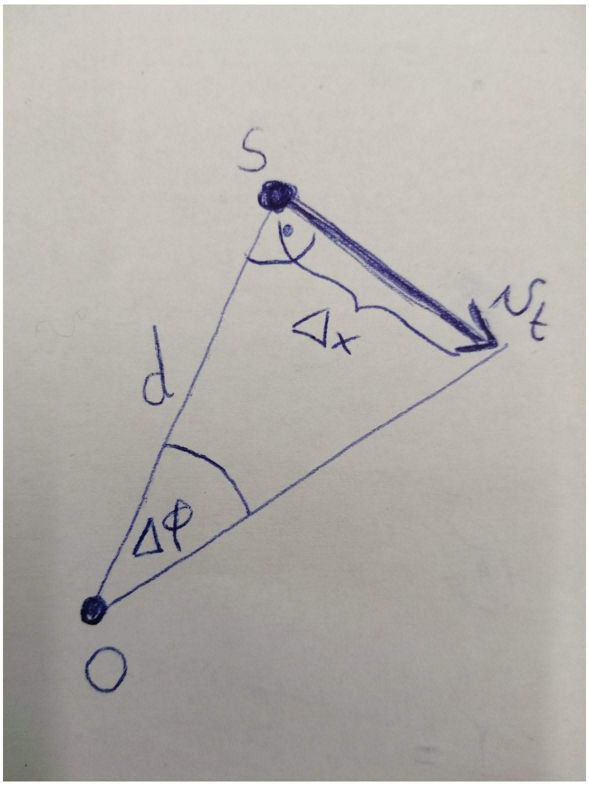
$$v_\mathrm{t}[\mathrm{km/s}] = 4.74 \frac{\mu[''/\text{év}]}{\pi['']}. \tag{5}$$

Történeti okokból kifolyólag a sajátmozgásnak két komponensét szokás megkülönböztetni: a μ_δ a deklináció, a μ_α pedig a rektaszcenzió változását adja meg (ld. 2. ábra). A gömbi geometria sajátságából adódóan az eredő sajátmozgás így számítható ki a komponensekből:

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2\delta}. \tag{6}$$

A képlet jelentése az, hogy minél magasabban vagyunk az égi egyenlítő fölött, a $\cos\delta$ annál kisebb, vagyis

*A csillagok természetesen a látóiránnyal párhuzamosan is elmozdulnak - ez a spektroszkópiai vonalak vörös- vagy kékeltolódásából mérhető meg.



1. ábra

a rektaszcenzió változása annál kisebb járulékot ad az eredő sajátmozgáshoz. Mindez könnyen belátható,[†] hiszen az égi hosszúsági körök a pólusban összefutnak, vagyis a közöttük lévő egységnyi szög egyre kisebb ívet jelent a nagyobb deklináció felé haladva.

[†] A(z) (6) egyenlet nem csak könnyen, hanem szépen is belátható. Koordinátázzuk be az egységnyi sugarú, megfigyelő-központú éggömböt a deklináció és a rektaszcenzió segítségével:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

A görbevonalú koordináta-rendszerek matematikai elmélete szerint ekkor a lokális bázisvektorokat a parciális deriváltak adják:

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} = \begin{pmatrix} -\cos\delta\sin\alpha \\ \cos\delta\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

és

$$\mathbf{e}_\delta = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\delta} = \begin{pmatrix} -\sin\delta\cos\alpha \\ -\sin\delta\sin\alpha \\ \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

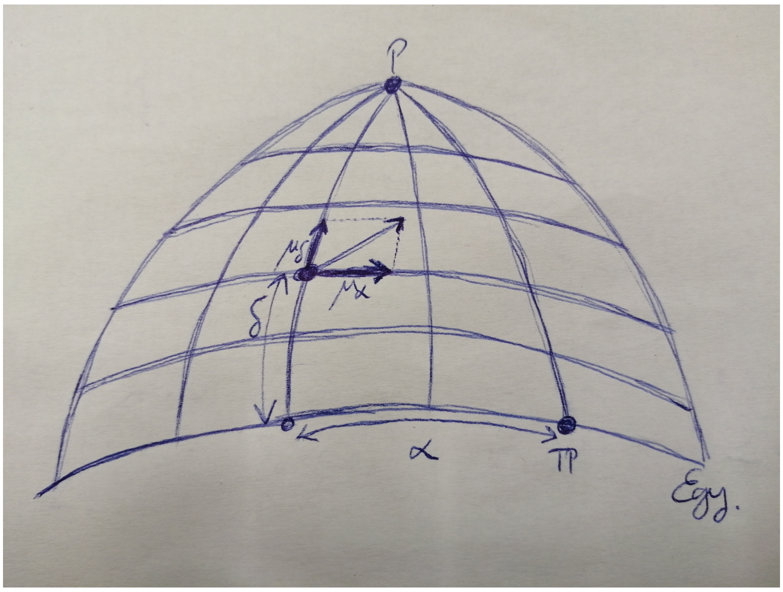
A bázisvektorok kiszámítása után az éggömb 2D metrikus tenzora már igen egyszerűen megkapható:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\delta\mathbf{e}_\delta & \mathbf{e}_\delta\mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\delta & \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\delta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

A sajátmozgás-vektor négyzete ebben a metrikában

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} \mu_\delta & \mu_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_\delta \\ \mu_\alpha \end{pmatrix} = \mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2\cos^2\delta, \tag{11}$$

aminek a négyzetgyöke visszaadja a(z) (6) egyenletet.



2. ábra

2. Az időfüggő sajátmozgás

Ahogy a csillagok elrepülnek a közelünkben, a perspektivikus hatás miatt a sajátmozgásuk valamennyivel megváltozik. Első közelítésben feltehetjük, hogy az elhaladó csillag (S) és a Nap (O) között nem lép fel kölcsönhatás, azaz S egyenesen, az x-tengely mentén halad (ld. 3. ábra).[‡]

Érdekes a kérdés, hogy mekkora lesz az S csillag tőlünk mért minimális távolsága (az ábrán d_{min}-nel jelölve; a szóráselméletben ezt impaktparaméternek is szokás hívni), illetve hogy mindezt mikor éri el. Kiindulási adatként a kezdeti távolság (d_0), továbbá a kezdeti radiális ($v_{\mathrm{r},0}$) és tangenciális sebesség ($v_{\mathrm{r},0}$) áll a rendelkezésünkre. Az eredő sebesség egy konstans vektor, melynek nagysága $v = \sqrt{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}$. Kihasználva a forgatónyomatékok hiányából adódó perdületmegmaradást, az impaktparaméter értéke

$$d_0 v_{\mathrm{t},0} = d_{\mathrm{min}} v \rightarrow d_{\mathrm{min}} = \frac{d_0 v_{\mathrm{t},0}}{\sqrt{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}}. \tag{12}$$

Az eddig az időig hátralévő idő formulája (a legelemibb fizika tanúsága szerint)

$$\tau = \frac{x_0}{v}, \tag{13}$$

ahol a Pitagorasz-tétel szerint

$$x_0^2 + d_{\mathrm{min}}^2 = d_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{d_0^2 - d_{\mathrm{min}}^2} = d_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\mathrm{t},0}^2}{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}}. \tag{14}$$

[‡]Valójában minimális gravitációs kölcsönhatás lesz a két objektum között, így S igazából egy hiperbola mentén fog mozogni. Ahogy azonban azt Chandrasekhar szórási formulája megadja, az aszimptóták közötti szög elég kicsiny lesz: $\theta \sim GM/(d_{\mathrm{min}} v^2) \sim 10^{-5}$. A precizitást szenvedélyesen szeretők kedvéért úgy is fogalmazhatunk, hogy S egy gyakorlatilag végtelen nagy excentricitású pályán fog haladni (ami egy egyenes).

Ezt visszahelyettesítve az előző formulába megkapjuk az idő értékét:

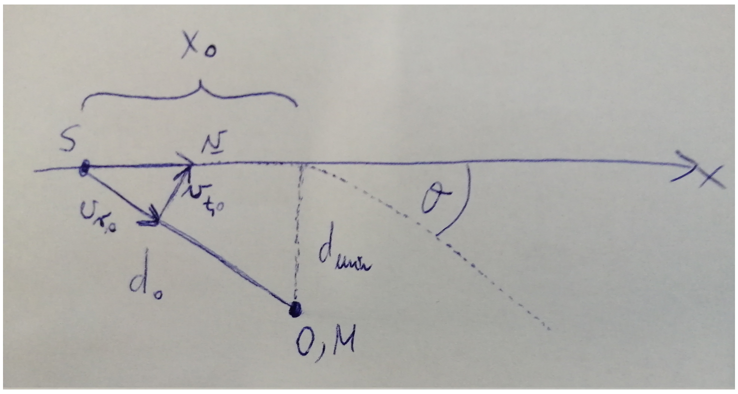
$$\tau = \frac{d_0\sqrt{1 - \frac{v_{\mathrm{t},0}^2}{v_{\mathrm{r},0}^2+v_{\mathrm{t},0}^2}}}{\sqrt{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}} = d_0\frac{|v_{\mathrm{r},0}|}{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}. \tag{15}$$

Nagyon fontos, hogy a távolságra vonatkozó mértékegységek a képletben megegyezzenek: vagy a d_0-t váltsuk át km-re, vagy a sebességek szerepeljenek pl. pc/s alakban.
A teljesség igénye miatt szerepeljen itt a sajátmozgás explicit időfüggését megadó képlet is, melynek levezetéséhez szintén a perdület-megmaradást ($r^2\mu$ =const.) használjuk föl:

$$r^2\mu = d_0 v_{\mathrm{t},0} \rightarrow \mu = \frac{d_0 v_{\mathrm{t},0}}{r^2}, \tag{16}$$

ahol r az S csillag tőlünk mért időfüggő távolsága, melyet így kapunk meg:

$$r = \sqrt{d_{\mathrm{min}}^2 + x^2} = \sqrt{d_{\mathrm{min}}^2 + (-x_0 + vt)^2}. \tag{17}$$



3. ábra

3. Feladatok

3.1.

Határozzuk meg a Barnard-csillag sajátmozgását, sebességvektorát, valamint számoljuk ki a legszorosabb megközelítés távolságát és időpontját!
Adatok:

- $\delta = 4°41'36'' = (4 + 41/60 + 36/3600)° = 4.69°$,
- $\alpha = 17^{\mathrm{h}}57^{\mathrm{m}48^{\mathrm{s}}}$,
- $\pi = 0.54745''$,
- $\mu_\delta = 10.3625''$/év,
- $\mu_\alpha = -0.8028''$/év,

- $v_{\mathrm{r},0} = -110.6$ km/s.

Az eredő sajátmozgás meghatározása a fent bevezetett képlet segítségével igen egyszerű:

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2\delta} = \sqrt{(10.3625)^2 + (-0.8028)^2 \cos^2(4.69^\circ)} = \underline{10.39''/\text{év}}. \tag{18}$$

Ami a sebességvektort illeti: a radiális komponens (Doppler-mérésekből) adott, a tangenciális komponensre pedig szintén van képlet:

$$v_{\mathrm{t},0} = 4.74 \frac{\mu[''/\text{év}]}{\pi['']} = 4.74 \cdot \frac{10.39}{0.54745} = \underline{89.96 \text{ km/s}}. \tag{19}$$

A szemléletesség kedvéért számoljuk ki a Barnard jelenlegi távolságát a parallaxisra vonatkozó egyenlettel:

$$d_0 = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0.54745} = 1.8267 \text{ pc}. \tag{20}$$

Ennek, valamint a sebesség-komponenseknek a felhasználásával a legszorosabb megközelítés távolsága (lényegében az impakt-paraméter):

$$d_{\min} = \frac{d_0 v_{\mathrm{t},0}}{\sqrt{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2}} = \frac{1.8267 \cdot 89.96}{\sqrt{(-110.6)^2 + (89.96)^2}} = \underline{1.1527 \text{ pc}^\S}, \tag{21}$$

ideje pedig (mostantól számítva)

$$\tau = d_0 \frac{|v_{\mathrm{r},0}|}{v_{\mathrm{r},0}^2 + v_{\mathrm{t},0}^2} = 1.8267 \cdot \frac{110.6}{110.6^2 + 89.96^2} = 3.07 \times 10^{11} \text{ s} = \underline{9901 \text{ év.}} \tag{22}$$

3.2.

Határozzuk meg a sajátmozgás hibáját, ha a rektaszcenziós komponenst csak egy adott hibahatáron belül ismerjük!
Adatok:

- $\delta = 60^\circ$,
- $\mu_\delta = 2''/\text{év}$,
- $\mu_\alpha = (1 \pm 0.1)''/\text{év} \to \Delta\mu_\alpha = 0.1''/\text{év}$.

Először számoljuk a sajátmozgás korrekció nélküli értékét:

$$\mu_0 = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha^2 \cos^2\delta} = \sqrt{2^2 + 1^2 \cdot \cos^2(60^\circ)} = 2.0616''/\text{év}. \tag{23}$$

A korrekcióval kiigazított sajátmozgás ennek perturbációjaként fogható fel, amit (első rendig) Taylor-sorfejtéssel kaphatunk meg:

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + (\mu_\alpha + \Delta\mu_\alpha)^2 \cos^2\delta} = \mu_0 + \frac{\partial\mu_0}{\partial\mu_\alpha}\Delta\mu_\alpha + ..., \tag{24}$$

§Ezzel akár a Naphoz legközelebbi csillaggá is válhatna, mivel a Proxima Centauri jelenlegi távolsága 1.3 pc. Időközben azonban ez utóbbi is közeledni fog hozzánk, tehát a sorrend marad a régiben.

azaz a sajátmozgás mérési bizonytalansága

$$\Delta\mu = \mu - \mu_0 = \frac{\partial \mu_0}{\partial \mu_\alpha}\Delta\mu_\alpha = \frac{\cos^2(\delta)\mu_\alpha \Delta\alpha}{\mu_0} = \frac{\cos^2(60^\circ)\cdot 1\cdot 0.1}{2.0616} = \underline{0.012127''/\text{év}}. \tag{25}$$

Deme Barnabás, 2020