A gömbi geometria

1. A síkgeometria

A csillagászatban azért foglalkozunk gömbi geometriával, mert a földfelszínről nézve a csillagok egy gömbfelületen (az éggömbön) látszanak elhelyezkedni *. A gömbi geometria két fontos tételét - a szinusz- és koszinusztételt - most a síkgeometriai megfelelőikből származtatjuk.

1.1. A síkbeli koszinusztétel

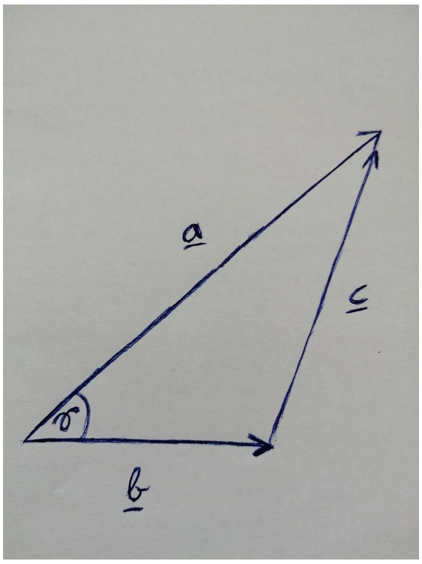
Vizsgáljuk meg a(z) 1. ábra vektorait: egy általános háromszöget határoznak meg, irányítottságuk miatt pedig

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \tag{1}$$

Négyzetre emelve az előbbi egyenlet mindkét oldalát, valamint kihasználva a skalárszorzás definícióját ($\mathbf{ab} = ab\cos\gamma$), máris megkapjuk a koszinusztételt:

$$\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{2}$$

Érdemes megjegyezni, hogy ebből a híres Pitagorász-tétel már nagyon egyszerűen adódik, egyszerűen csak a γ szöget 90°-kal kell egyenlővé tenni (ami miatt a koszinuszos tag kiesik).



1. ábra

1.2. A síkbeli szinusztétel

Ha most a(z) 2. ábra (szintén általános) háromszögét vesszük szemügyre, akkor láthatjuk, hogy az m magasságvonal azt két derékszögű háromszögre osztja. Fölírva a szinusz-függvény definícióját ("szöggel

*Ez egy meglehetősen ódivatú indok. Manapság a szférikus geometria azért igazán érdekes az Univerzummal kapcsolatban, mert a kozmológiai elméletek szerint a Világegyetem metrikája akár gömbi is lehetne - bár az aktuális megfigyelések szerint nem az.

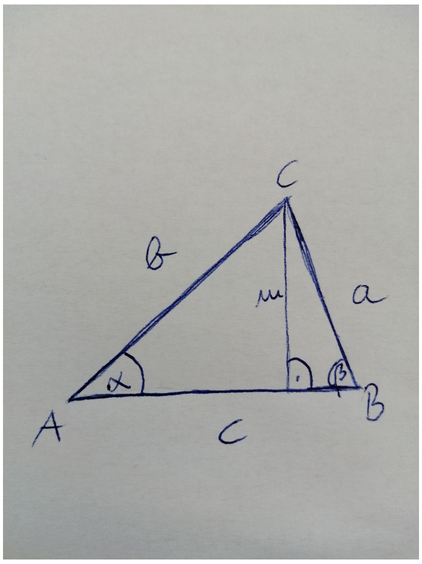
szemközti befogó per átfogó") mind az α-, mind a β- szögekre:

$$\sin\alpha = \frac{m}{b}, \tag{3}$$

$$\sin\beta = \frac{m}{a}. \tag{4}$$

Elvégezve két átszorzást kapjuk, hogy $b\sin\alpha = m = a\sin\beta$, amit nagyvonalúan általánosíthatunk a c oldalra is, így kijön a szinusztétel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{5}$$



2. ábra

2. A gömbi geometria

2.1. A koszinusz- és szinusztétel gömbön

A gömbi (vagy szférikus) geometria lényege, hogy a geometriai alakzatokat (köröket, háromszögeket, stb.) nem egy sík, hanem egy gömbfelületre rajzoljuk, és ott vizsgáljuk a rájuk vonatkozó összefüggéseket.[†] A(z) 3. ábrán látható, R sugarú gömbre rajzolt háromszögre pl. az alábbi, szférikus koszinusz- és szinusztétel vonatkozik:

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right) + \sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right)\cos\gamma, \tag{6}$$

$$\frac{\sin(a/R)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(b/R)}{\sin\beta} = \frac{\sin(c/R)}{\sin\gamma}. \tag{7}$$

Némi fantáziával el lehet képzelni, hogy minél nagyobb a gömb sugara, a háromszög által lefedett terület annál síkabb lesz. Precízebben: az $R \to \infty$ limeszben vissza kell kapnunk az előbbi alfejezetek síkgeo-

[†]Ha az alakzatokat egy nyeregfelületre, vagy pedig egy képzetes sugarú gömbre rajzoljuk, akkor a hiperbolikus (Bolyai–Lobacsevszkij-) geometriát kapjuk.

metriai összefüggéseit.

Ehhez csak a koszinusz- és szinusz-függvények Taylor-sorait kell felhasználni, vagyis hogy $x \ll 1$ esetén

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \tag{8}$$

$$\sin x \approx x. \tag{9}$$

x helyére az a/R, b/R valamint a c/R mennyiségeket helyettesítve (amik kicsik, mivel a nevezőben lévő R nagy), a gömbi koszinusztétel így alakul:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{R^2}\right) + \frac{a}{R}\frac{b}{R}\cos\gamma =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{R^2} + \frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{R^4} + \frac{ab}{R^2}\cos\gamma. \tag{10}$$

Beszorozva $-2R^2$-tel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{R^2} - 2ab\cos\gamma. \tag{11}$$

Figyelembe véve, hogy $1 \ll R$, vagyis hogy R^2 egy óriási szám, a jobb oldali harmadik tag nagyon kicsi, így elhagyhatjuk, ezzel pedig visszakaptuk a síkbeli koszinusztételt.

A síkbeli szinusztétel származtatása egyszerűbb: a szinusz-függvényt az argumentumaival közelítve kapjuk, hogy

$$\frac{a/R}{\sin\alpha} = \frac{b/R}{\sin\beta} = \frac{c/R}{\sin\gamma}, \tag{12}$$

amit R-rel beszorozva máris adódik a kívánt formula.

Egy dolgot kell még hozzátennünk az eddigiekhez. A most körüljárt képleteket végső soron majd az éggömbre fogjuk alkalmazni, szóval elvileg szükségünk van az éggömb R sugarára. Ez értelemszerűen abszurd, amit kétféleképpen lehet kimagyarázni:

- Olyan hosszmértékegységet választunk, amelyben a kérdéses gömb sugara egységnyi: $R = 1$. Ekkor a sugár nyilván nem fog megjelenni a képleteinkben.
- A gömbháromszögek oldalait nem hosszukkal jellemezzük, hanem azzal a szöggel, amely alatt a gömb középpontjából nézve látszanak. Radiánban mérve ezek éppen a/R, b/R illetve c/R. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a gömbháromszögnek nem csak a szögeit (α, β, γ), de az oldalait (a, b, c) is radiánban mérjük (és ez az éggömb esetén pont így van), akkor a szférikus szinusz- és koszinusztétel így fest:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}, \tag{13}$$

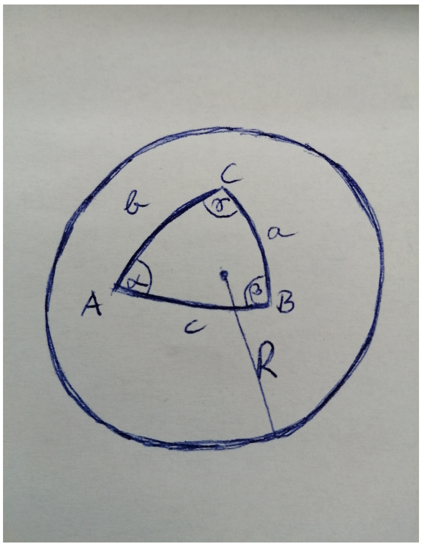
$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma^{\ddagger}. \tag{14}$$

Érdemes már itt hozzátenni, hogy némi (itt nem részletezett) rafinériával a koszinusztétel felírható egy "kicsavart" verzióban is:

$$\cos\gamma = -\cos a\cos b + \sin a\sin b\cos c^{\S}. \tag{15}$$

‡Természetesen az összefüggés a többi oldalra is felírható: $\cos a = \cos b\cos c + \sin a\sin b\cos\alpha$, illetve $\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\beta$.

§Hasonlóan az előzőekhez: $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$, illetve $\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$.



3. ábra

2.2. Egyéb összefüggések

A síkgeomtriával analóg módon a gömbháromszögek oldalaira és szögeire is vonatkoznak bizonyos megszorítások, melyek az alábbiakban foglalhatók össze.

- $0° < a + b + c < 360°$,
- $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$,[¶]
- $a + b > c$,
- $|a - b| < c$,
- $\alpha + \beta - 180° < \gamma$.

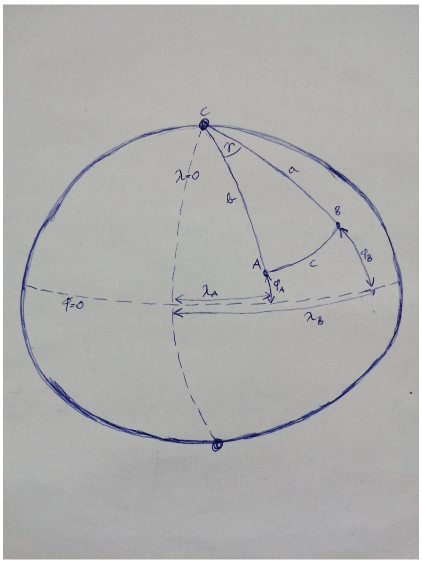
3. Alkalmazás a földgömbre

A(z) 4. ábra a Föld sematikus rajzát mutatja: a szaggatott vonalak jelzik az Egyenlítőt ($\phi = 0$) illetve greenwhich-i kezdő hosszúsági kört ($\lambda = 0$). Adott két város, A és B, melyek a C-vel jelölt pólussal egy gömbháromszöget alkotnak; földrajzi koordinátáik rendre (ϕ_A, λ_A) és (ϕ_B, λ_B). Tanulmányozva az ábrát megállapítható, hogy $\gamma = \lambda_B - \lambda_A$, továbbá hogy $a = 90° - \phi_B$ és $b = 90° - \phi_A$. Behelyettesítve mindezeket a $\cos c$-t megadó formulába,

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma = \\ &= \cos(90° - \phi_B)\cos(90° - \phi_A) + \sin(90° - \phi_B)\sin(90° - \phi_A)\cos(\lambda_B - \lambda_A) = \\ &= \sin\phi_B \sin\phi_A + \cos\phi_B \cos\phi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A), \end{aligned} \tag{16}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sin(90° - x) = \cos x$ és $\cos(90° - x) = \sin x$.
A kapott eredményhez érdemes hozzáfűzni mégvalamit. Beírva a megfelelő földrajzi adatokat megkapjuk

[¶]Az összefüggések közül talán ez a leghíresebb: a szférikus háromszögek belső szögeinek összege nem 180°, hanem annál mindig nagyobb (a hiperbolikus geometriában pedig kisebb).



4. ábra

ugyan $\cos c$-t, de ez még nem határozza meg egyértelműen c-t magát, mivel c-nek illetve $360° - c$-nek ugyanaz a koszinusza: $\cos(c) = \cos(360° - c)$. Könnyen belátható ennek a szemléletes jelentése: a formula nem csak az A és B közti legrövidebb távolságot adja meg, hanem azt az úthosszt is, amit az egész Földet megkerülve járunk be.

4. Feladatok

4.1.

Adott egy gömbháromszög, melynek ezeket az adatait ismerjük:

- $\gamma = 90°$,
- $a = 119°46' = 119.77°$,
- $\beta = 52°25' = 52.417°$.

Határozzuk meg a többi oldalát/szögét!
A $\cos\alpha$-ra vonatkozó képlet alapján érdemes elindulni:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a =$$
$$= -\cos(52.417°)\cos(90°) + \sin(52.417°)\sin(90°)\cos(119.77°) = -0.39348. \quad (17)$$

Ebből két α-érték adódik: $\alpha_1 = 113.17°$ és $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 246.83°$. Ne felejtsük azonban el, hogy α-nak ki kell elégítenie az alábbi összefüggést is:

$$\alpha + \beta - 180° < \gamma \rightarrow \alpha < 180° + \gamma - \beta = 217.58°. \quad (18)$$

Ez egyből kizárja α_2-t, úgyhogy $\underline{\alpha = 113.17°}$.
b-t a szférikus szinusztételből próbálhatjuk meg kiszámolni:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \to \sin b = \sin \beta \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \sin(52.417°) \frac{\sin(119.77°)}{\sin(113.17°)} = 0.74824. \tag{19}$$

Ez szintén két értéket ad: $b_1 = 48.438°$ és $b_2 = 180° - b_1 = 131.56°$. A két alternatíva között itt már nem lehet a gömbháromszögekre vonatkozó összefüggések segítségével választani, mert ahhoz ismerni kellene c-t is. Ehelyett b-t kiszámoljuk egy másik módon, a $\cos\beta$-ra utaló képlettel is:

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b \to \cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} = \\ = \frac{\cos(52.417°) + \cos(113.17°)\cos(90°)}{\sin(113.17°)\sin(90°)} = 0.663. \tag{20}$$

Természetesen ez is kettő b-t ad: $b_1 = 48.438°$ és $b_2 = 311.56°$, de hogy ne keveredjünk ellentmondásba az előző eredménnyel, itt már egyértelműen az előbbit kell választani, azaz $\underline{b = 48.438°}$.
Már csak c kiszámítása maradt, melyhez úgyfent a szinusztételt használjuk:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \to \sin c = \sin \gamma \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \sin(90°) \frac{\sin(119.77°)}{\sin(113.17°)} = 0.94418. \tag{21}$$

Innen $c_1 = 70.766°$ és $c_2 = 109.23°$, de mivel

$$|a - b| < c \to |119.77° - 48.438°| = 71.331° < c, \tag{22}$$

ezért $\underline{c = 109.23°}$.

4.2.

Budapest és Caracas földrajzi koordinátái rendre a következők:

- $\phi_{\mathrm{Bp}} = 47°30'$ É $= +47.5°$,
- $\lambda_{\mathrm{Bp}} = 19°$ K $= +19°$,
- $\phi_{\mathrm{C}} = 10°30'$ É $= +10.5°$,
- $\lambda_{\mathrm{C}} = 66°55'$ Ny $= -66.92°$.

Számoljuk ki a két város távolságát!
Ehhez a fentebb levezett formulát használjuk, ahol c jelöli most ezt a bizonyos távolságot:

$$\cos c = \sin\phi_{\mathrm{Bp}}\sin\phi_{\mathrm{C}} + \cos\phi_{\mathrm{Bp}}\cos\phi_{\mathrm{C}}\cos(\lambda_{\mathrm{Bp}} - \lambda_{\mathrm{C}}) = \\ = \sin(47.5°)\sin(10.5°) + \cos(47.5°)\cos(10.5°)\cos(19° - (-66.92°)) = 0.182. \tag{23}$$

A c-re kapott két eredmény közül ($c_1 = 79.54°$ és $c_2 = 280.46°$) természetesen a kisebbet kell választani (mivel a hosszabb az ellenkező irányban bejárt hosszabb távolságot jelöli): $\underline{c = 79.54°}$.
A fokokban kifejezett távolság földrajzilag nem túl szemléletes, ezért érdemes az eredményt inkább kilométerekben kifejezni. Először váltsuk át radiánba, $c = 1.3881$ rad, majd kihasználva, hogy a radiánban

kifejezett szög definíció szerint a körív illetve a sugár aránya, kapjuk, hogy

$$c[\mathrm{rad}] := \frac{c[\mathrm{km}]}{R[\mathrm{km}]} \to c[\mathrm{km}] = R[\mathrm{km}]c[\mathrm{rad}] = 6371 \cdot 1.3881 = \underline{8843.6\ \mathrm{km}}. \tag{24}$$

Deme Barnabás, 2020