A sajátmozgás

1. Feladatok

1.1.

Határozzuk meg az égi egyenlítő egyenletét az első ekvatoriális valamint a horizontális koordinátarendszerben, vagyis a $\delta(t)$ és az $m(A)$ függvényeket az égi egyenlítő mentén!
Az (első) egyenlítői koordinátarendszerben a feladat nagyon egyszerű, hiszen itt az egyik koordináta, a deklináció, éppen úgy van definiálva, hogy az egyenlítő mentén végig nulla legyen, azaz

$$\underline{\delta(t) = 0.} \tag{1}$$

A horizontális rendszerben a helyzet csak kicsit bonyolultabb. Induljunk ki a $\sin\delta = \sin m \sin\phi - \cos m \cos\phi \cos A$ egyenletből, és helyettesítsünk be $\delta = 0$-t. Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\sin m \sin\phi = \cos m \cos\phi \cos A, \tag{2}$$

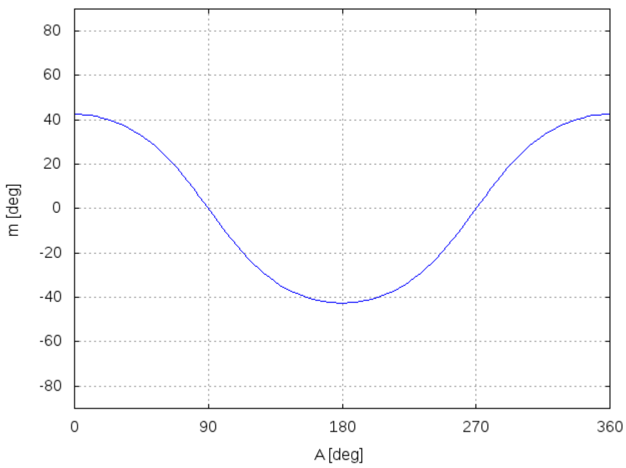
vagyis

$$\tan m = \cot\phi \cos A. \tag{3}$$

Invertálás után a végeredmény

$$\underline{m = \arctan(\cot\phi \cos A).} \tag{4}$$

Szerencsére az arctan() függvény egyértelmű a magasság értelmezési tartományán, vagyis a $[-90°; +90°]$ intervallumon, így a függvény gond nélkül ábrázolható (ld. 1. ábra).



1. ábra

1.2.

Határozzuk meg, hogy hány százalékkal kevesebb a földfelszín Nap általi besugárzása Magyarországon a téli napfordulókor, összehasonlítva azt a nyári napfordulóval!

Jelölje $\mathbf{S}$ a Napból érkező sugárzás energiaáram-sűrűségét:* ekkor a $\mathrm{d}\mathbf{A}$ felületelemen $\mathrm{d}t$ idő alatt

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathbf{S}\mathrm{d}\mathbf{A}\mathrm{d}t \tag{5}$$

energia áramlik át. A $\mathrm{d}\mathbf{A}$ felületelem méretét egységnyinek választva ($|\mathrm{d}\mathbf{A}| = 1$), továbbá kihasználva a(z) 2. ábrán lévő geometriai elrendeződést, az előző formula így írható át:

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = |\mathbf{S}|\cos(90^\circ - m)\mathrm{d}t = S\sin(m)\mathrm{d}t, \tag{6}$$

ahol S értelemszerűen az energiaáram-sűrűség nagysága, m pedig a magasság. Az egységnyi felületet egész nap érő fluxust úgy kapjuk, hogy a fenti összefüggést folytonosan felösszegezzük (integráljuk) a Nap horizont feletti tartózkodásának időtartamára:

$$\mathcal{E} = \int_{-t^+}^{t^+} S\sin(m)\mathrm{d}t = S\int_{-t^+}^{t^+} (\sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t)\ \mathrm{d}t, \tag{7}$$

ahol t^+ jelöli a lenyugvás óraszögét ($-t^+$ pedig persze a kelését), illetve kihasználtuk, hogy S konstans, továbbá hogy $\sin m = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t$. A kelés-nyugvás óraszögére, vagyis a határozott integrál határaira a korábban tanult formula használható:

$$t^+ = |\arccos(-\tan\delta\tan\phi)|. \tag{8}$$

Ennek ismeretében a fenti integrál már igen könnyen kiértékelhető:

$$\mathcal{E} = 2S\left(\sin\delta\sin\phi|\arccos(-\tan\delta\tan\phi)| + \cos\delta\cos\phi\sin\left(|\arccos(-\tan\delta\tan\phi)|\right)\right). \tag{9}$$

Helyettesítsük be Magyarország szélességét ($\phi = 47.5^\circ$), majd egymás után a nyári és a téli napforduló értékeit ($\delta = \pm 23.5^\circ$)! Az eredmény:

$$\mathcal{E}_{\delta=+23.5^\circ} = 2S\cdot 1.1525 \tag{10}$$

és

$$\mathcal{E}_{\delta=-23.5^\circ} = 2S\cdot 0.22892. \tag{11}$$

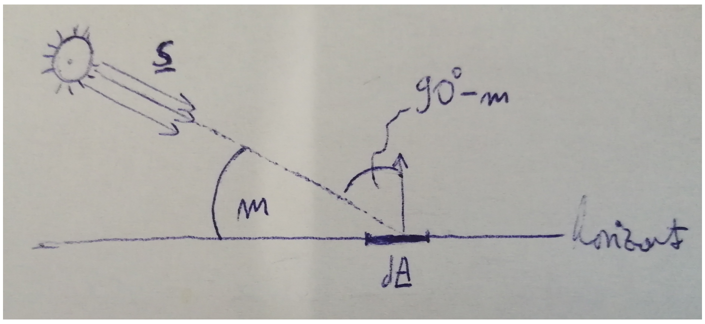
A kettő aránya 0.19863, vagyis a téli napforduló napján kb. 80%-kal kevesebb napsugárzás éri a földfelszínt, mint a nyári napfordulókor. Érdemes hozzátenni, hogy ennek kettős oka van: egyrészt a Nap alacsonyabb szögben süt, másrészt mindezt jóval rövidebb ideig teszi.

1.3.

Adott egy Nap körül körpályán keringő bolygó (ω szögsebességgel), melynek forgástengelye a keringési sík normálisával θ szöget zár be. Határozzuk meg, hogy a bolygóról nézve a Nap deklinációja milyen sebességgel változik (azaz a $\dot{\delta}$ mennyiséget)!

Tegyük föl először, hogy $\theta = 0$, azaz hogy az ekliptika és az égi egyenlítő egybeesik. Vegyük föl a koordinátarendszerünket a(z) 3. ábrán látható módon: megfigyelőként (O) az x- és az y-tengely metszéspontjában vagyunk, az x-tengely a tavaszpontba mutat ($\alpha = 0^\mathrm{h}$), az y- pedig jobbsodratú. Ekkor a Nap helyvektora

*Ennek Poynting-vektor a becsületes neve, kiszámítása pedig (mértékegység-rendszertől függő együtthatók erejéig) így fest: $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}$, ahol $\times$ a vektoriális szorzást jelöli, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ pedig rendre az elektromos térerősség és a mágneses indukció.



2. ábra

az időparaméter függvényében:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

ahol $\phi = \omega t$ és $\omega = 2\pi/\text{év}$ a Nap látszólagos évi szögsebessége az éggömbön az ekliptika mentén. Ha a forgástengelyt θ szöggel megdöntjük a keringési sík normálisához képest, akkor az ekliptika is ennyivel "nyílik szét" az égi egyenlítőhöz képest, vagyis a Nap égi útját egy $\hat{\mathbf{M}}$ mátrix segítségével el kell forgatni:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Az így kapott vektor felbontható egy $x-y$-síkba eső horizontális ($\mathbf{v}_\mathrm{h}$), illetve egy arra merőleges vertikális ($\mathbf{v}_\mathrm{v}$) komponensre:

$$\mathbf{v}_\mathrm{h} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\mathbf{v}_\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}, \tag{15}$$

amikkel $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{h} + \mathbf{v}_\mathrm{v}$.[†] Felhasználva a(z) 3. ábra geometriai elrendeződését és a szinusz definícióját ("szöggel szemközti befogó per átfogó") kapjuk, hogy

$$\sin\delta = \frac{|\mathbf{v}_\mathrm{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sin\theta\sin\phi}{1} = \sin\theta\sin(\omega t). \tag{16}$$

Az előrelátók bölcsességével számítsuk ki a koszinuszt is:

$$\cos\delta = \frac{|\mathbf{v}_\mathrm{h}|}{|\mathbf{v}|} = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \cos^2\theta\sin^2(\omega t)}. \tag{17}$$

[†] Triviális és megnyugtató módon ellenőrizhető, hogy $|\mathbf{v}| = 1$ (mivel az éggömböt egységnyi sugarúnak választottuk), valamint hogy $\mathbf{v}_\mathrm{h}\mathbf{v}_\mathrm{v} = 0$ (mivel a két vektor merőleges egymásra).

Deriváljuk $\sin\delta$-t, majd a végeredményhez rendezzük az egyenletet $\dot{\delta}$-ra:

$$\cos(\delta)\dot{\delta} = \sin\theta\cos(\omega t)\omega \to \dot{\delta} = \frac{\omega\sin\theta\cos(\omega t)}{\sqrt{\cos^2(\omega t)+\cos^2\theta\sin^2(\omega t)}}. \tag{18}$$

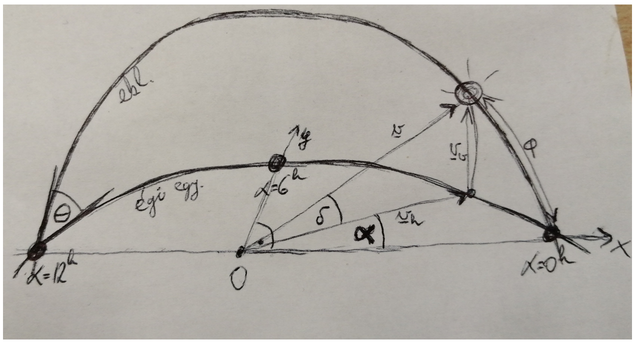
Érdemes kipróbálni a képletünket néhány speciális esetre.
Ha $\theta = 0$, azaz a bolygó "nincs megdőlve", akkor arra számítunk, hogy a Nap egész évben rajta marad az égi egyenlítőn (ami az ekliptikával esik egybe). Valóban, $\theta = 0$ esetén

$$\dot{\delta} = \frac{\omega\sin 0\cos(\omega t)}{\sqrt{\cos^2(\omega t)+\cos^2 0\sin^2(\omega t)}} = 0 \to \delta = \text{const.}, \tag{19}$$

ahol az integrálási konstanst 0-ra állíthatjuk.
Ha $\theta = 90°$, azaz a bolygó "ráhasal a pályasíkra", akkor azt sejtjük, hogy a Nap egyenletes sebességgel végiggördül a pólusokon (illetve a zeniten és nadíron) átmenő ekliptikán. És tényleg, $\theta = 90°$ esetén

$$\dot{\delta} = \frac{\omega\sin(90°)\cos(\omega t)}{\sqrt{\cos^2(\omega t)+\cos^2(90°)\sin^2(\omega t)}} = \omega\frac{\cos(\omega t)}{|\cos(\omega t)|} = \pm\omega \to \delta = \text{const.} \pm \omega t, \tag{20}$$

ahol az integrálási konstans újfent 0-ra állítandó, a $\pm$ pedig azt mutatja, hogy félévenként hol közeledünk a pólushoz, hol távolodunk tőle.



3. ábra

1.4.

Adjuk meg a Nap horizontális koordinátáit egy olyan bolygóról nézve, ami kötött módon kering körpályán a Nap körül, azaz forgási és keringési frekvenciája megegyezik (ω)! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\theta = 0$ és hogy a Napot az egyenlítőről nézzük ($\phi = 0$).
A válasz intuitíve is könnyen megadható: sem a magasság, sem az azimut nem változik az idővel, a Nap az éggömbnek mindig ugyanazon a pontján fog állni. A formálisabb bizonyításhoz az alábbi képletekre lesz szükség:

$$\cos m\sin A = \cos\delta\sin t \tag{21}$$

és

$$\cos m\cos A = \sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi. \tag{22}$$

Kihasználva korábbi eredményünket, miszerint $\theta = 0$ esetén $\delta = 0$, az előbbi egyenletek igen leegyszerűsödnek:

$$\cos m \sin A = \sin t \tag{23}$$

és

$$\cos m \cos A = 0. \tag{24}$$

A második egyenletből következik, hogy $\cos A = 0$, azaz a Nap végig rajta marad a kelet-, a nyugat- és a zenit-ponton átmenő főkörön. Ezt visszahelyettesítve az első képletbe:

$$\cos m = \pm \sin t. \tag{25}$$

Nincs más hátra, mint kifejezni a t óraszöget a τ időváltozó segítségével:

$$t = S(\tau) - \alpha(\tau). \tag{26}$$

Az S csillagidőt a bolygó forgási periódusa diktálja, azaz $S = S_0 + \omega\tau$. Az α rektaszcenzió meghatározásához a(z) 3. ábrára van szükségünk, melyről leolvasható, hogy az x- és y-irányú egységvektorok rendre

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

és

$$\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

a Nap helyvektorának horizontális komponense pedig ($\theta = 0$ mellett)

$$\mathbf{v}_\mathrm{h} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \sin(\omega\tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

A skaláris szorzásra vonatkozó szabály szerint

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{e}_x \mathbf{v}_\mathrm{h}}{|\mathbf{e}_x||\mathbf{v}_\mathrm{h}|} = \cos(\omega\tau) \tag{30}$$

és

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\mathbf{e}_y \mathbf{v}_\mathrm{h}}{|\mathbf{e}_y||\mathbf{v}_\mathrm{h}|} = \sin(\omega\tau), \tag{31}$$

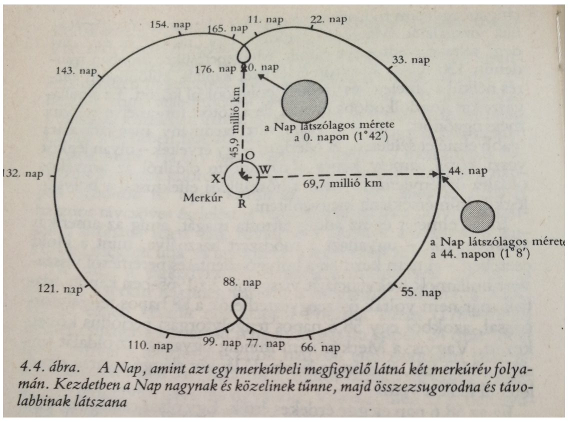
azaz $\alpha = \omega\tau$. Visszahelyettestíve az óraszög és a magasság képletébe:

$$t = S_0 + \omega\tau - \omega\tau = S_0 \rightarrow m = \arccos\left(\pm \sin S_0\right) = \mathrm{const.}, \tag{32}$$

ami megfelel a várakozásainknak.

Természetesen a valóság közel sem ennyire mesterkélt: általában nem az egyenlítőn állunk, a tengelyferdeség nem nulla és a pályalapultság miatt a Nap sem egyenletesen halad végig az ekliptikán. Ez utóbbi tényező különösen markánsan jelentkezik a Merkúr esetében, ahol a nagy excentricitás miatt ($e = 0.2$)

a Nap kétszer akkora szögsebességgel halad peri-, mint aphéliumkor. A spin–pálya-kölcsönhatás miatt ráadásul a Merkúr forgási ideje 2:3-as arányban rezonál a keringésivel. Az eredményt, vagyis hogy a Nap milyen pályát fut be az égen egy merkúri nap alatt, a(z) 4. ábra mutatja.



4.4. ábra. A Nap, amint azt egy merkúrbeli megfigyelő látná két merkúrév folyamán. Kezdetben a Nap nagynak és közelinek tűnne, majd összezsugorodna és távolabbinak látszana

4. ábra. Kép eredete: Peter Francis: *A bolygók*.

Deme Barnabás, 2020