Az égrajzi koordináta-rendszerek

1. A koordináta-rendszerek bevezetése

A földgömbhöz hasonlóan az éggömbön való tájékozódást is nagyon megkönnyíti, hogyha annak kétdimenziós felületét valamilyen koordináta-rendszerrel behálózzuk. Az éppen adott célnak megfelelően három különböző koordináta-rendszert vezetünk be.

1.1. Horizontális

Ha csak annyi a célunk, hogy megadjuk egy objektum pillanatnyi helyét, vagyis hogy éppen milyen irányba fordítsuk a távcsövünket, akkor ezt két szöggel könnyen megtehetjük. Az azimut megadja, hogy hány fokkal fordítsuk el a távcsövet vízszintesen, a magasság pedig azt, hogy hány fokkal függőlegesen.
Precízebben:

- alapsík: a horizont;
- alapirány: dél;
- forgatás iránya: a zenit felől nézve az óramutató járásával megegyezően ("jobbkéz felé").

A horizontális koordináta-rendszerrel az a baj, hogy mind az azimut, mind a magasság más és más a Föld különböző pontjairól, arról nem beszélve, hogy egy adott helyen is változik az idővel.

1.2. Első egyenlítői

Az első egyenlítői rendszer azért jó, mert a csillag égi egyenlítő fölötti magasságát megadó deklináció sem a térben, sem az időben nem változik.* A másik koordináta, az óraszög, azt adja meg, hogy hogyan mozdul el a csillag az égi egyenlítő síkjával párhuzamosan. Mivel az éggömb viszonylagos mozgása miatt ez az idővel egyenes arányban történik, ezért az óraszöget szokás órában, percben és másodpercben megadni (...$^{\mathrm{h}}$...$^{\mathrm{m}}$...$^{\mathrm{s}}$) a szokásos szögmértékegységek helyett. Mivel az égbolt 24^{h} alatt fordul körbe $360°$-ot, ezért a váltószám: $1^{\mathrm{h}} = 15°$.
Precízebben:

- alapsík: az égi egyenlítő síkja;
- alapirány: az égi egyenlítő és a meridián horizont felett lévő metszéspontja (az északi féltekéről nézve a déli irány);
- forgatás iránya: az égi északi pólus felől nézve az óramutató járásával megegyezően (az északi féltekéről nézve "jobbkéz felé").

Az óraszög még mindig nem olyan koordináta, amit a deklinációhoz hasonlóan katalógusba lehetne venni (mivel azt mutatja meg, hogy mennyivel vagyunk túl az égitest kulminációján).

*Ez persze szigorú értelemben véve nem igaz. A bolygók a nevüket is onnan kapták, hogy bolyonganak az állócsillagok között, eközben pedig változtatják az égi egyenlítő feletti magasságukat (azaz a deklinációjukat). Később szó lesz az ún. sajátmozgásról is, ami azt adja meg, hogy a csillagok mozgása a galaktikus térben hogyan módosítja a deklinációt.

1.3. Második egyenlítői

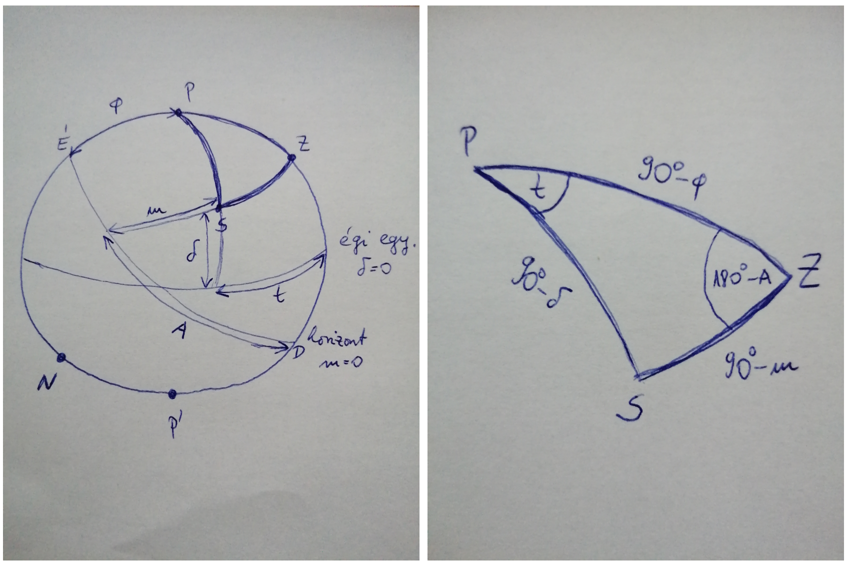
A második egyenlítői koordinátarendszer azért hasznos, mert a deklináció mellett a szintén állandó rektaszcenziót használja koordinátaként. Előbbi a földrajzi szélességi, utóbbi a hosszúsági kör analogonja. Precízebben:

- alapsík: az égi egyenlítő síkja;
- alapirány: a tavaszpont (az égi egyenlítő és az eklipitika "tavaszi" metszéspontja);
- forgatás iránya: az északi pólus felől nézve az óramutató járásával ellentétesen.

A teljesség igénye miatt itt megjegyezzük, hogy léteznek még egyéb csillagászati koordinátarendszerek is, pl. a galaktikus, de azokat itt nem részletezzük.

2. Koordináta-transzformációk

A megfigyelés során kulcsfontosságú, hogy a koordináta-rendszerek között át tudjunk váltani, hiszen pl. a csillagok koordinátái a katalógusban második egyenlítői rendszerben vannak, a távcső tengelyeit viszont a horizontális rendszer szögei szerint állítjuk be. A transzformációkat egyelőre csak a horizontális és az első egyenlítői között vezetjük le, a rektaszcenzió kiszámításához ugyanis szükség lesz még egy kiegészítő fogalomra is (az ún. csillagidőre).
A(z) 1. ábra bal oldalán az éggömböt láthatjuk, melyen az északi pólus (P), a zenit (Z) és a kérdéses objektum (S) egy gömbháromszöget határoz meg: ez kinagyítva a jobb oldalon vehető szemügyre. A fent már említett fogalmak (magasság, deklináció, stb.) definíció szerint be vannak jelölve az ábrán (pl. a magasság a csillag horizont feletti magasságát adja meg, stb.); egyedül a ϕ-vel jelölt szög nem triviális. Ez alapból a megfigyelő földrajzi szélességét, tehát a földi egyenlítőtől vett szögtávolságát adja meg, de az északi pólus horizont feletti magasságaként is értelmezhető. Ezt könnyű belátni: a pólus azt a pontot jelenti, ahol a Föld forgástengelye átdöfi az éggömböt; ha a földi északi sarkon állok ($\phi = 90°$), akkor a tengely éppen a fejem fölött, vagyis a zenitnél döfi át az éggömböt ($m_P = 90°$). Most levezetjük az



1. ábra

átváltásokat megadó képleteket. Alkalmazzuk először a gömbi koszinusztételt a $90^\circ - m$ oldalra:

$$\cos(90^\circ - m) = \cos(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \phi)\cos t, \tag{1}$$

vagyis

$$\sin m = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t. \tag{2}$$

Most írjuk fel a szinusztételt ugyanerre, valamint a $90^\circ - \delta$ oldalra:

$$\frac{\sin(90^\circ - m)}{\sin t} = \frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(180^\circ - A)}, \tag{3}$$

azaz

$$\cos m \sin A = \cos\delta\sin t. \tag{4}$$

Most vegyük a koszinusztételt a $90^\circ - \delta$ oldalra:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - m)\cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - m)\sin(90^\circ - \phi)\cos(180^\circ - A), \tag{5}$$

amiből

$$\sin\delta = \sin m\sin\phi - \cos m\cos\phi\cos A. \tag{6}$$

Írjuk be a $\sin m$ helyére a korábban megkapott formulát,

$$\begin{aligned}\sin\delta = \sin\phi(\sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t) - \cos\phi\cos m\cos A = \\ = \sin\delta\sin^2\phi + \sin\phi\cos\delta\cos\phi\cos t - \cos\phi\cos m\cos A,\end{aligned} \tag{7}$$

majd masszírozzuk tovább a képletet:

$$\sin\delta - \sin^2\phi\sin\delta = \left(1 - \sin^2\phi\right)\sin\delta = \cos^2\phi\sin\delta = \sin\phi\cos\delta\cos\phi\cos t - \cos\phi\cos m\cos A. \tag{8}$$

Osszuk mindkét oldalt $\cos\phi$-vel:

$$\sin\delta\cos\phi = \sin\phi\cos\delta\cos t - \cos m\cos A, \tag{9}$$

végül

$$\cos m\cos A = \sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi. \tag{10}$$

Most az előbbi trükköt játsszuk le fordítva: a $\sin m$-et megadó képletbe írjuk be a $\sin\delta$-t kifejező formulát:

$$\begin{aligned}\sin m = \sin\phi(\sin\phi\sin m - \cos\phi\cos m\cos A) + \cos\phi\cos\delta\cos t = \\ = \sin^2\phi\sin m - \sin\phi\cos\phi\cos m\cos A + \cos\phi\cos\delta\cos t.\end{aligned} \tag{11}$$

Újfent gyurmázva a képletet:

$$\sin m - \sin m\sin^2\phi = \sin m(1 - \sin^2\phi) = \sin m\cos^2\phi = -\sin\phi\cos\phi\cos m\cos A + \cos\phi\cos\delta\cos t, \tag{12}$$

ezúttal pedig $\sin\phi$-vel leosztva kapjuk, hogy

$$\sin m\cos\phi = -\sin\phi\cos m\cos A + \cos\delta\cos t, \tag{13}$$

amit így véglegesítünk:

$$\cos\delta\cos t = \sin m\cos\phi + \sin\phi\cos m\cos A. \tag{14}$$

Érdemes összefoglalni az átváltásokra kapott eredményeket:

- első egyenlítői → horizontális:
  - $\sin m = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t$;
  - $\cos m\sin A = \cos\delta\sin t$;
  - $\cos m\cos A = \sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi$;
- horizontális → első egyenlítői:
  - $\sin\delta = \sin m\sin\phi - \cos m\cos\phi\cos A$;
  - $\cos\delta\sin t = \cos m\sin A$;
  - $\cos\delta\cos t = \sin m\cos\phi + \sin\phi\cos m\cos A$.

Mint az a feladatok során is kiderül majd, a magasság és a deklináció kiszámításához elegendő ismerni szinuszaikat (mivel ezek a $[-90°; +90°]$ intervallumon vannak értelmezve, ahol az arkusz szinusz egyértelmű), az azimutok és óraszögek ismeretéhez azonban mind a szinuszaik, mind a koszinuszaik ismeretére szükség van.

3. A képletek szemléletes jelentése

A fent levezetett képletek jelentésének megvilágítás végett most néhány szélsőséges, de cserébe nagy egyszerűséget kínáló esetet vizsgálunk meg.

3.1. Az egyenlítőn állunk

Ebben az esetben $\phi = 0$ (ami azt is jelenti, hogy az északi pólus éppen a horizonton van, északi irányban), azaz a formuláink:

$$\sin m = \cos\delta\cos t, \tag{15}$$

$$\cos m\sin A = \sin t\cos\delta, \tag{16}$$

$$\cos m\cos A = -\sin\delta. \tag{17}$$

Egy érdekes dolog szinte azonnal megállapítható, mégpedig a Nap kelésére és nyugvására vonatkozóan. Ilyenkor a Nap értelemszerűen a horizonton van, vagyis $m = 0$. Behelyettesítve ezt a(z) (15) egyenletbe azt kapjuk, hogy $\cos\delta\cos t = 0$. Ez akkor teljesül, ha legalább az egyik tényező nullával egyenlő. A Nap esetében a deklináció sosem eshet kívül a $[-23.5°; +23.5°]$ intervallumon, így a $\cos\delta$ sem lehet soha nulla (ehhez ugyanis $\delta = 90°$ kellene). Mindez azt jelenti, hogy az egyenlítőről nézve a Nap kelésekor és nyugvásakor $\cos t = 0$, azaz $t = \pm 90° \to \pm 6^{\mathrm{h}}$. Figyelemreméltó, hogy mindez nem függ az évszaktól

(vagyis a Nap deklinációjától): az egyenlítőről nézve minden nap egyforma hosszúságú ($\sim 12^{\mathrm{h}}$).[†]
Ha ezen kívül még azt is kirójuk, hogy a Nap rajta legyen az égi egyenlítőn ($\delta = 90°$)[‡], akkor a képletek még tovább egyszerűsödnek:

$$\sin m = \cos t, \tag{18}$$

$$\cos m \sin A = \sin t, \tag{19}$$

$$\cos m \cos A = 0. \tag{20}$$

Délben (vagyis a Nap kulminációjakor) definíció szerint $t = 0$, vagyis $\cos t = \cos 0 = 1$, amiből a(z) (18) egyenlet alapján következik, hogy $\sin m = 1 \rightarrow m = 90°$, azaz a Nap a zeniten van. A(z) (20) képletből az is gyorsan kijön, hogy napkeltekor és napnyugtakor (mikor $m = 0$) $\cos A = 0$, vagyis a Nap pontosan keleten kel és nyugaton nyugszik.

3.2. Az északi sarkon állunk

Az északi sarkon állva $\phi = 90°$, azaz a transzformációs képleteink:

$$\sin m = \sin \delta, \tag{21}$$

$$\cos m \sin A = \cos \delta \sin t, \tag{22}$$

$$\cos m \cos A = \cos \delta \cos t. \tag{23}$$

Egy dolog megintcsak feltűnő: a(z) (21) egyenlet azt sugallja, hogy a csillagok magassága megegyezik a deklinációjukkal, vagyis a horizont feletti magasságuk egyenlő az égi egyenlítő felettivel. Ebben semmi meglepő sincs, hiszen az északi sarkról végezve a megfigyelést az égi egyenlítő éppen ráilleszkedik a horizontra.
Az előző esethez hasonlóan specifikáljuk tovább a dolgot: legyen $\delta = 0$. Ekkor:

$$\sin m = 0 \rightarrow m = 0, \tag{24}$$

$$\sin A = \sin t, \tag{25}$$

$$\cos A = \cos t, \tag{26}$$

ahol a második és harmadik egyenletben a koszinusz argumentumába már be is írtuk az első egyenletből következő $m = 0$-t. Világosan látszik, hogy $A = t$, ami szintén nem mellbevágó eredmény.[§] A ugyanis nem más, mint a horizont menti, t pedig az égi egyenlítő menti szög, de ez a kettő - ahogy azt már az előbb is említettük - egybeesik.

[†] Hamarosan látni fogjuk, hogy ez az állítás ebben a formában nem igaz - ennek oka, hogy a csillagászatban többféle időfogalom is forgalomban van, pl. az ún. csillag- és középidő, ezek pedig nem egyeznek meg egymással, ami okoz némi kavarodást.

[‡] Ez kétszer is megtörténik egy évben: a tavaszi ill. az őszi napéjegyenlőségkor.

[§] Érdemes megjegyezni, hogy pl. a $\sin A = \sin t$ képletből önmagában még nem következik, hogy $A = t$; ehhez a koszinuszoknak is meg kell egyezniük. Igaz viszont, hogy ez tulajdonképpen már a(z) (22) és (23) egyenletekből is látszik, csak kevésbé feltűnő módon. Ha ugyanis $\delta = m$, akkor a $\cos m$-ek és $\cos \delta$-k kiejtik egymást.

4. Feladatok

4.1.

Adottak egy Budapestről megfigyelt csillag horizontális koordinátái. Számítsuk ki az első egyenlítői koordinátákat!
Adatok:

- $m = 80°32' = 80 + (32/60)° = 80.53°$,
- $A = 13°05' = 13 + (5/60)° = 13.08°$,
- $\phi = 47.5°$.

Kezdjük a deklináció meghatározásával, mivel az a szinuszából egyértelműen meghatározható:

$$\sin\delta = \sin\phi\sin m - \cos\phi\cos m\cos A = \\ = \sin(47.5°)\sin(80.53°) - \cos(47.5°)\cos(80.53°)\cos(13.08°) = 0.6194 \quad (27)$$

Innen $\delta_1 = 38.243°$ és $\delta_2 = 180° - \delta_1 = 141.76°$, viszont δ_2 kívül esik megengedett $\delta \in [-90°; +90°]$ intervallumon, tehát $\underline{\delta = 38.243°} = 38°(0.243 \times 60)' = 38°14.58' = 38°14'(0.58 \times 60)'' = \underline{38°14'35''}$.
Az óraszög kiszámításához két egyenletre lesz szükségünk, egy szinuszosra és egy koszinuszosra. Előbbi:

$$\cos\delta\sin t = \cos m\sin A \to \sin t = \frac{\cos m\sin A}{\cos\delta} = \frac{\cos(80.53°)\sin(13.08°)}{\cos(38.243°)} = 0.047407, \quad (28)$$

ahonnan $t_1 = 2.7172°$ és $t_2 = 180° - t_1 = 177.28°$. A koszinuszos egyenlet:

$$\cos\delta\cos t = \sin m\cos\phi + \sin\phi\cos m\cos A \to \cos t = \frac{\sin m\cos\phi + \sin\phi\cos m\cos A}{\cos\delta} = \\ = \frac{\sin(80.53°)\cos(47.5°) + \sin(47.5°)\cos(80.53°)\cos(13.08°)}{\cos(38.243°)} = 0.99887, \quad (29)$$

ahonnan $t_1 = 2.7193°$ és $t_2 = 360° - t_1 = 357.28°$. Összevetve a két különböző egyenletből kapott aletrnatív értékeket, $\underline{t = 2.71°} = (2.71/15)^{\mathrm{h}} = 0.18^{\mathrm{h}} = (0.18 \times 60)^{\mathrm{m}} = 10.84^{\mathrm{m}} = 10^{\mathrm{m}} + (0.84 \times 60)^{\mathrm{s}} = \underline{10^{\mathrm{m}}50^{\mathrm{s}}}$. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a csillag kb. 11 perce haladt át felső kulminációján.

4.2.

Vizsgáljuk Budapestről a Lant csillagkép híres csillagát, a Vegát. Számítsuk ki horizontális koordinátáit az első egyenlítőiekből!
Adatok:

- $\delta = 38°47'01'' = 38° + (47/60)° + (1/3600)° = 38.784°$,
- $t = 1^{\mathrm{h}}5^{5}28^{\mathrm{s}} = 1^{\mathrm{h}} + (5/60)^{\mathrm{h}} + (28/3600)^{\mathrm{h}} = 1.094^{\mathrm{h}} = 16.367°$,
- $\phi = 47.5°$.

Ebben az előzőhöz képest megfordított feladatban a magasságot a legegyszerűbb kiszámolni, mert most ezt határozza meg egyértelműen a szinusza:

$$\begin{aligned}\sin m &= \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t = \\ &= \sin(38.784°)\sin(47.5°) + \cos(38.784°)\cos(47.5°)\cos(16.367°) = 0.9671, \qquad (30)\end{aligned}$$

amiből $\underline{m = 75.27°} = 75° + (0.27 \times 60)' = 75°16' + (0.2 \times 60)'' = \underline{75°16'12''}$.[¶]

Analóg módon az óraszöggel, most az azimut kiszámításához kell egy szinuszos, majd egy koszinuszos képlet. Előbbi:

$$\sin A\cos m = \cos\delta\sin t \to \sin A = \frac{\cos\delta\sin t}{\cos m} = \frac{\cos(38.784°)\sin(16.367°)}{\cos(75.27°)} = 0.86355, \qquad (31)$$

amiből $A_1 = 59.718°$ és $A_2 = 180° - A_1 = 120.28°$. Utóbbi:

$$\begin{aligned}\cos A\cos m = \sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi \to \cos A &= \frac{\sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi}{\cos m} = \\ &= \frac{\sin(47.5°)\cos(38.784°)\cos(16.367°) - \sin(38.784°)\cos(47.5°)}{\cos(75.27°)} = 0.50418, \qquad (32)\end{aligned}$$

ahonnan $A_1 = 59.718°$, $A_2 = 360° - A_1 = 300.28°$. Az átfedő megoldásokat választva: $\underline{A = 59°} = 59° + (0.718 \times 60)' = \underline{59°42'}$.

4.3.

Adott egy objektum, melynek mind a horizontális, mind az első egyenlítői koordinátáit ismerjük. Számítsuk ki, hogy az észlelést melyik szélességi körről végezzük!

Adatok:

- $\delta = 30°$,
- $t = 2^{\mathrm{h}} = 30°$,
- $m = 64°5'42'' = 64° + (5/60)° + (42/3600)° = 64.095°$,
- $A = 97°37'52'' = 97° + (37/60)° + (52/3600)° = 97.631°$.

Használjuk a $\sin m = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos t$ és a $\cos m\cos A = \sin\phi\cos\delta\cos t - \sin\delta\cos\phi$ képleteket. Behelyettestíve:

1. $\sin(64.095°) = \sin(30°)\sin\phi + \cos(30°)\cos(30°)\cos\phi$,
2. $\cos(64.095°)\cos(97.631°) = \cos(30°)\cos(30°)\sin(\phi) - \sin(30°)\cos\phi$,

azaz

1. $0.5\sin\phi + 0.75\cos\phi = 0.89952$,
2. $0.75\sin\phi - 0.5\cos\phi = -0.058014$.

[¶] A másik megoldás ($m_2 = 180° - m_1 > 90°$), ezért nem jöhet szóba.

A hanyag elegancia jegyében oldjuk meg a feladatot a lineáris algebra módszereivel. Egy kétismeretlenes, inhomogén lineáris egyenletrendszerről van szó:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.75 \\ 0.75 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.89950 \\ -0.058014 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Szorozzuk be mindkét oldalt a mátrix inverzével:[‖]

$$\begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61538 & 0.92308 \\ 0.92308 & -0.61538 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.89950 \\ -0.058014 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.86603 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

A befejező lépésnek két módja is van: vagy kiszámítjuk mind a szinusz, mind a koszinusz arkuszát (és összevetjük őket), vagy megint kihasználjuk, hogy a ϕ csak a $[-90°; +90°]$ intervallumon értelmezett. Utóbbi lehetőséget választva kapjuk, hogy $\phi = 30°$.

Deme Barnabás, 2020

[‖] Egy $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverze $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.